Schulinterner Lehrplan der Goetheschule Essen zum Kernlehrplan für die gymnasiale Oberstufe

Mathematik

Inhalt

Seite

1 Die Fachschaft Mathematik an der Goetheschule 3

2 Entscheidungen zum Unterricht 5

2.1 Unterrichtsvorhaben 5

2.1.1 Übersicht über die Unterrichtsvorhaben in der Einführungsphase ***Fehler! Textmarke nicht def***

2.1.2 Konkretisierte Unterrichtsvorhaben in der Einführungsphase 10

2.2.1 Übersicht über die Unterrichtsvorhaben in der Qualifikationsphase 20

2.2.2 Konkretisierte Unterrichtsvorhaben in der Qualifikationsphase 26

2.3 Grundsätze der fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe 57

2.4 Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung 59

2.5 Lehr- und Lernmittel 64

3 Entscheidungen zu fach- und unterrichtsübergreifenden Fragen 66

4 Qualitätssicherung und Evaluation 67

5 Anhang 68

1 Die Fachschaft Mathematik an der Goetheschule

Die Goetheschule befindet sich im Stadtteil Bredeney im Süden der Stadt Essen und ist dort eines von zwei öffentlichen Gymnasien. Sie liegt in einem ruhigen Wohngebiet und hat eine eher homogene Schülerschaft, was den sozialen und ethnischen Hintergrund betrifft. Zurzeit unterrichten etwa 70 Lehrerinnen und Lehrer gut 800 Schülerinnen und Schüler, die vorwiegend aus Bredeney und den benachbarten Stadtteilen des Schulstandorts stammen.

In der Oberstufe sind durchschnittlich etwas mehr als 100 Schülerinnen und Schüler in einer Jahrgangsstufe. Diese ergeben sich nicht nur aus der drei- bis vierzügigen Sekundarstufe ein, sondern auch durch die Aufnahme von Realschülern. Hinzu kommen ebenso Schülerinnen und Schüler von anderen Essener Gymnasien und aus den Nachbarstädten, die neben dem Abitur den an der Goetheschule angebotenen IB-Abschluss erlangen möchten.

Das Fach Mathematik wird in der Regel in der Einführungsphase in vier bis fünf Grundkursen unterrichtet, aus denen sich in der Qualifikationsphase in der Regel zwei Leistungs- und drei Grundkurse entwickeln. Die Mathematikgrundkurse werden dreistündig (eine Doppelstunde und eine Einzelstunde), die Leistungskurse fünfstündig (zwei Doppelstunden und eine Einzelstunde) unterrichtet. Darüber hinaus wird in der Einführungsphase ein Vertiefungskurs eingerichtet.

Die Fachschaft Mathematik fühlt sich in besonderer Weise verpflichtet, Schülerinnen und Schüler ihren Begabungen und Neigungen entsprechend individuell zu fördern sowie ihnen eine umfassende Orientierung im Bereich des MINT-Schwerpunktes unserer Schule für ihren weiteren Lebensweg zu bieten.

Schülerinnen und Schüler aller Klassen- und Jahrgangsstufen werden zur Teilnahme an den vielfältigen Wettbewerben im Fach Mathematik ermutigt und darin begleitet. Für die Sekundarstufe II gibt es neben den Teilnahmemöglichkeiten an den schon aus der Sekundarstufe I schon bekannten Wettbewerben (Essener Mathematikwettbewerb/Mathematikolympiade, Bundeswettbewerb Mathematik, Känguru-Wettbewerb, Online-Teamwettbewerb der Bezirksregierung) noch den Internationalen Modellierungswettbewerb in Maastricht, zu dem jährlich ein Team aus fünf Oberstufenschülerinnen und -schülern antritt.

Es herrscht in der Fachschaft Mathematik Einigkeit darüber, dass neben innermathematischen Fragestellungen die mathematischen Fachinhalte in sinnstiftenden Kontexten und mit Lebensweltbezug vermittelt werden, wann immer sich das anbietet (besonders in den Kompetenzbereichen „Modellieren“ und „Problemlösen“). So werden die Schülerinnen und Schüler schon auf die in den zentralen Prüfungen in der Sekundarstufe II gängige Praxis der Verwendung von Kontexten vorbereitet.

In der Sekundarstufe I wird großer Wert darauf gelegt, dass die Schülerinnen und Schüler zunehmend mit mathematischen Werkzeugen und Softwares als Hilfsmittel arbeiten können. Dazu stehen in der Schule PC-Unterrichtsräume sowie mobile Laptopklassen zur Verfügung. Bereits ab Klasse 5 setzen wir diverse Geometriesoftware (Euklid, GeoGebra) ein. In Klasse 7 wird mit dem Tabellenkalkulationsprogramm Excel gearbeitet. Ab Klasse 8 ergänzt der graphikfähige Taschenrechner (GTR) *TI-Nspire* die digitale Arbeit, sodass bereits wichtige grundlegende Funktionen der Anwendung des GTRs erlernt werden können.

Daher kann in der Sekundarstufe II davon ausgegangen werden, dass die Schülerinnen und Schüler mit den grundlegenden Möglichkeiten dieser digitalen Werkzeuge vertraut sind.

2 Entscheidungen zum Unterricht

2.1 Unterrichtsvorhaben

Die Darstellung der Unterrichtsvorhaben im schulinternen Lehrplan besitzt den Anspruch, sämtliche im Kernlehrplan angeführten Kompetenzen umzusetzen. Dies entspricht der Verpflichtung jeder Lehrkraft, Lerngelegenheiten für ihre Lerngruppe so anzulegen, dass alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans von den Schülerinnen und Schülern erworben werden können.

Die entsprechende Umsetzung erfolgt auf zwei Ebenen: der Übersichts- und der Konkretisierungsebene.

Im „Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben" (Kapitel 2.1.1) wird die für alle Lehrerinnen und Lehrer gemäß Fachkonferenzbeschluss verbindliche Verteilung der Unterrichtsvorhaben dargestellt. Das Übersichtsraster dient dazu, den Kolleginnen und Kollegen einen schnellen Überblick über die Zuordnung der Unterrichtsvorhaben zu den einzelnen Jahrgangsstufen sowie den im Kernlehrplan genannten Kompetenzen, Inhaltsfeldern und inhaltlichen Schwerpunkten sowie in der Fachkonferenz verabredeten verbindlichen Kontexten zu verschaffen. Um Klarheit für die Lehrkräfte herzustellen und die Übersichtlichkeit zu gewährleisten, werden in der Kategorie „Kompetenzen" an dieser Stelle nur die übergeordneten Kompetenzerwartungen ausgewiesen, während die konkretisierten Kompetenzerwartungen erst auf der Ebene konkretisierter Unterrichtsvorhaben Berücksichtigung finden. Der ausgewiesene Zeitbedarf versteht sich als grobe Orientierungsgröße, die nach Bedarf über- oder unterschritten werden kann. Um Spielraum für Vertiefungen, individuelle Förderung, besondere Schülerinteressen, aktuelle Themen bzw. die Erfordernisse anderer besonderer Ereignisse (z.B. Praktika, Kursfahrten o.ä.) zu erhalten, wurden im Rahmen dieses schulinternen Lehrplans ca. 75 Prozent der Bruttounterrichtszeit verplant.

Während der Fachkonferenzbeschluss zum „Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben" einschließlich der dort genannten Kontexte zur Gewährleistung vergleichbarer Standards sowie zur Absicherung von Lerngruppenübertritten und Lehrkraftwechseln für alle Mitglieder der Fachkonferenz Bindekraft entfalten soll, besitzt die exemplarische Ausweisung „konkretisierter Unterrichtsvorhaben" (Kapitel 2.1.2, Tabellenspalten 3 und 4) empfehlenden Charakter. Insbesondere Referendarinnen und Referendaren sowie neuen Kolleginnen und Kollegen dienen die konkretisierten Unterrichtsvorhaben vor allem zur standardbezogenen Orientierung in der neuen Schule, aber auch zur Verdeutlichung von unterrichtsbezogenen fachgruppeninternen

Absprachen zu didaktisch-methodischen Zugängen, fächerübergreifenden Kooperationen, Lernmitteln und -orten sowie vorgesehenen Leistungsüberprüfungen, die im Einzelnen auch den Kapiteln 2.2 bis 2.4 zu entnehmen sind. Begründete Abweichungen von den empfohlenen Vorgehensweisen bezüglich der konkretisierten Unterrichtsvorhaben sind im Rahmen der pädagogischen Freiheit der Lehrkräfte jederzeit möglich. Sicherzustellen bleibt allerdings auch hier, dass im Rahmen der Umsetzung der Unterrichtsvorhaben insgesamt alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans Berücksichtigung finden. Dies ist durch entsprechende Kommunikation innerhalb der Fachschaft zu gewährleisten.

Die Inhalte für die Einführungsphase wurden auf der Fachkonferenz am 29. September 2014 einstimmig beschlossen. Der Beschluss der Inhalte für die Qualifikationsphase erfolgte in einer Dienstbesprechung am 11. August 2015 und der Kernlehrplan wurde dann als Ganzes in der Fachkonferenz am 22. September 2015 verabschiedet.

2.1.1 Übersicht über die Unterrichtsvorhaben in der Einführungsphase

Übersicht mit Inhaltsblöcken und Zeitvereinbarungen

E-Phase		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	E-A1	15-18
II	E-A2	6
***Ziel-/Zeitvorgabe**: Der erste Analysisblock (E-A1, ggf. E-A2) sollte bis zu den Herbstferien unterrichtet werden; je nach Ferienlage und zur Verfügung stehender Zeit kann der Block E-A2 auch integriert in E-A4 später unterrichtet werden.*		
III	E-S1	9
IV	E-S2	9
***Ziel-/Zeitvorgabe**: Dieser Stochastikblock (E-S1, E-S2) sollte zwischen Herbst- und Weihnachtsferien unterrichtet werden.*		
V	E-A3	15
VI	E-A4	15
***Ziel-/Zeitvorgabe**: Die beiden nachfolgenden Blöcke E-G1 und E-G2 enthalten keine für die ZK EF relevanten Inhalte und sollten daher am Ende des Schuljahres unterrichtet werden.*		
VII	E-G1	6
VIII	E-G2	6-9
	Summe:	ca. 84

Für das Selbststudium (z.B. für Schülerinnen und Schüler, die die Einführungsphase/Jahrgangsstufe 10 im Ausland absolvieren) sind Empfehlungen für die Erarbeitung der entsprechenden Abschnitte im eingeführten Lehrbuch mit angegeben. Dieses Lehrbuch ist derzeit in zweierlei Versionen erhältlich:

- Elemente der Mathematik 10, Einführungsphase (2010), ISBN 978-3-507-87230-1 – im Folgenden kurz „EdM10“) im Übersichtsraster in magenta; die letzten beiden – nicht zentralklausurrelevanten – Geometriekapitel befinden sich in: EdM, NRW Qualifikationsphase (2011) GK/LK, ISBN 978-3-507-87900-3.

- Elemente der Mathematik, NRW Einführungsphase (2014), ISBN 978-3-507-87980-5 – im Folgenden kurz „EdM14“) im Übersichtsraster in grün.

Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben Einführungsphase

Einführungsphase	
Unterrichtsvorhaben I: **Thema**: *Transformationen von Funktionen und deren Nutzung im Kontext (E-A1)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Grundlegende Eigenschaften von Potenz-, Exponential- und Sinusfunktionen **Zeitbedarf**: 15-18 Std. EdM10 Kapitel 2 Modellieren periodischer Vorgänge (S.87-120), Abschnitte 1.3,1.5-1.7 EdM14 Kapitel 1 Funktionen (S.10-88)	*Unterrichtsvorhaben II:* **Thema:** *Beschreibung der Eigenschaften von Potenzfunktionen und ganzrationalen Funktionen (E-A2)* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Argumentieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Eigenschaften ganzrationaler Funktionen **Zeitbedarf:** 6 Std. EdM10 Abschnitte 4.2-4.3 (S.189-197) EdM14 Abschnitte 3.1-3.3 (S.136-153)
Unterrichtsvorhaben III: **Thema:** *Den Zufall im Griff – Modellierung von Zufallsprozessen (E-S1)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Mehrstufige Zufallsexperimente **Zeitbedarf:** 9 Std. EdM10 Abschnitte 5.4-5.5 (S.278-292) EdM14Abschnitt 4.1 (S.176-195)	*Unterrichtsvorhaben IV:* **Thema**: *Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten (E-S2)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Kommunizieren **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Bedingte Wahrscheinlichkeiten **Zeitbedarf:** 9 Std. EdM10 Abschnitte 5.2-5.3 (S.268-277) EdM14Abschnitt4.2 (S.196-214)

Einführungsphase Fortsetzung	
Unterrichtsvorhaben V: **Thema**: *Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A3)* **Zentrale Kompetenzen:** • Argumentieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Grundverständnis des Ableitungsbegriffs **Zeitbedarf**: 15 Std. EdM10 Kapitel 3 Differenzialrechnung (S.121-177) EdM14Kapitel2Differenzialrechnung (S.90-134)	*Unterrichtsvorhaben VI:* **Thema**: *Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A4)* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Argumentieren **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen • Funktionsuntersuchung **Zeitbedarf**: 15 Std. EdM10 Kapitel 4 Funktionsuntersuchungen (S.181-251) EdM14 Kapitel 3 Funktionsuntersuchungen (S.136-174)
Unterrichtsvorhaben VII: **Thema**: *Unterwegs in 3D – Koordinatisierungen des Raumes (E-G1)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Kommunizieren **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Koordinatisierungen des Raumes **Zeitbedarf**: 6 Std. EdM Q-Phase Abschnitte 5.1.1 (S.209-217) EdM14Abschnitt 5.1 (S.216-220)	*Unterrichtsvorhaben VIII:* **Thema**: *Vektoren bringen Bewegung in den Raum (E-G2)* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Vektoren und Vektoroperationen **Zeitbedarf**: 6-9 Std. EdM Q-Phase Abschnitte 5.1.2-4 (S.218-32) EdM14Abschnitte 5.2-5.4 (S.221-238)
Summe Einführungsphase: ca. 84 Stunden	

Einführungsphase Funktionen und Analysis (A)

<table>
<tr><td colspan="2">Thema:Transformationen von Funktionen und deren Nutzung im Kontext(E-A1)</td></tr>
<tr><td>Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
• wenden einfache Transformationen (Streckungen, Verschiebungen, Spiegelungen) auf quadratische Funktionen, die Sinusfunktion, Exponentialfunktionen und Potenzfunktionen an und deuten die zugehörigen Parameter
• beschreiben Wachstumsprozesse mithilfe linearer Funktionen und Exponentialfunktionen
• beschreiben die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen positiven und negativen Exponenten sowie von quadratischen und kubischen Wurzelfunktionen

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
• erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
• übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler
• nutzen Tabellenkalkulation und grafikfähige Taschenrechner
• verwendenverschiedene digitale Werkzeuge zum
… Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle
… zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen</td><td>Algebraische Rechentechniken werden grundsätzlich parallel vermittelt und geübt (ggf. ergänzt durch differenzierende, individuelle Zusatzangebote aus Aufgabensammlungen, insbesondere bei dem oft erhöhten Angleichungs- und Förderbedarf von Schulformwechslern).
Hilfreich kann es sein, dabei die Kompetenzen der Mitschülerinnen und Mitschüler (z. B. durch Kurzvorträge) zu nutzen.
Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung in die elementaren Bedienkompetenzen des GTR gerichtet werden.

Der Einstieg in die Transformationen bietet sich mithilfe der Sinusfunktion an. Anknüpfend an die aus Klasse 9 bekannte Trigonometrie im Dreieck werden die trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis mit unbeschränktem Definitionsbereich sowie das Bogenmaß eingeführt. Neben der Wiederholung der bereits aus der Sek I bekannten Transformationen (Verschiebungen in x- und y-Richtung, Streckung in y-Richtung, Spiegelung an x-Achse) werden die noch fehlenden Transformationen (Streckung in x-Richtung, Spiegelung an y-Achse) eingeführt. Als Kontexte dienen Kreisbewegungen wie z.B. beim Riesenrad oder periodische Vorgänge wie ungedämpfte Schwingungen aus der Physik; somit können Transformationen nicht nur am Graphen erläutert, sondern auch im Kontext (z.B. als Amplitude, Frequenz) gedeutet werden.
Im Anschluss bietet sich eine kurze Wiederholung der quadratischen Funktionen (Scheitelpunktsform) unter dem Aspekt der Transformationen an. Wachstumsprozesse (linear, quadratisch, exponentiell) wurden in der Klasse 9 ausführlich behandelt und werden daher nur knapp im Kontext wiederholt und verglichen. Die Eigenschaften von Potenzfunktionen lassen sich gut mithilfe des GTR erarbeiten. Sowohl bei Exponential- als auch bei Potenzfunktionen kann dann das Transformationsverhalten erneut thematisiert werden.</td></tr>
</table>

Thema: *Beschreibung der Eigenschaften von Potenzfunktionen und ganzrationalen Funktionen (E-A2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben die Eigenschaften von Potenzfunktionen und ganzrationalen Funktionen mit ganzzahligen positiven und negativen Exponenten sowie von quadratischen und kubischen Wurzelfunktionen • verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** **Problemlösen** *Die Schülerinnen und Schüler* • analysieren und strukturieren Problemsituationen (Erkunden) • erkennen Muster und Beziehungen (Erkunden) • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus (Lösen) **Argumentieren (Vermuten)** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf • unterstützen Vermutungen beispielgebunden • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur **Werkzeuge nutzen** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen Tabellenkalkulation und grafikfähige Taschenrechner • verwendenverschiedene digitale Werkzeuge zum … Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen	Die Einführung in die Bedienung des GTR im Bereich der Analysis wird fortgesetzt. In diesem Abschnitt sollen zentrale Eigenschaften von Funktionen - unabhängig von der in E-A1 kennen gelernten und vorgenommenen Zuordnung zu bestimmten Klassen – untersucht werden, die in Ansätzen schon aus der Sek I bekannt sind und für die noch keine Differentialrechnung benötigt wird. Wesentliche Eigenschaften in dieser Hinsicht sind Symmetrie (besonders Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Ursprung), Grenzwertverhalten für „große“ positive und negative x-Werte, Monotonie, Polstellen sowie Schnittpunkte mit beiden Koordinatenachsen. *Methodisch eingeführt werden können die Eigenschaften durch (arbeitsteilige) Gruppenarbeit oder Vorträge von Schüler(gruppe)n.* Im Vordergrund steht das anschauliche Verständnis dieser wesentlichen Funktionseigenschaften, nicht formale Schreibweisen (z.B. eine *limes*-Schreibweise). Abschließend kann eine Charakterisierung und Klassifizierung der verschiedenen Funktionstypen erfolgen. *Dieses Unterrichtsvorhaben kann sowohl im Anschluss an E-A1 unterrichtet werden, falls vor den Herbstferien noch Zeit dafür bleibt. Alternativ sollte es in E-A4 integriert werden.*

Thema: *Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A3)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • berechnen durchschnittliche und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Kontext • erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate • deuten die Tangente als Grenzlage einer Folge von Sekanten • deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate/ Tangensteigung • beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion) • leiten Funktionen graphisch ab • begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte, Wendepunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen • nennen die Kosinusfunktion als Ableitung der Sinusfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** **Argumentieren (Vermuten)** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf • unterstützen Vermutungen beispielgebunden • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur **Werkzeuge nutzen** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene unter anderem auch digitale Werkzeuge zum … Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle … grafischen Messen von Steigungen • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden, Berechnen und Darstellen	Für den Einstieg werden durchschnittlichen Änderungsraten in unterschiedlichen Sachzusammenhängen von den Schülern untersucht, die auch im weiteren Verlauf immer wieder auftauchen (z. B. Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, Temperaturmessung, Aktienkurse, Wirk- oder Schadstoffkonzentration, Wachstum, Kosten- und Ertragsentwicklung). Als Kontext für den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate kann z.B. das Höhenprofil einer Fahrradtour untersucht werden. Alternativ bietet sich auch der Kontext Geschwindigkeit an, bei dem die vermeintliche Diskrepanz zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer längeren Fahrt und der durch ein Messgerät ermittelten Momentangeschwindigkeit untersucht wird. Tabellenkalkulation und Dynamische-Geometrie-Software können zur numerischen und geometrischen Darstellung des Grenzprozesses beim Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekanten zur Tangenten (Zoomen) eingesetzt werden. Im Zusammenhang mit dem graphischen Ableiten und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schülerinnen und Schüler in besonderer Weise zum sauberen mathematischen Argumentieren unter Benutzung der korrekten Fachsprache angehalten werden. Zu diesem Zeitpunkt wird auch der Begriff des Extrempunktes (lokal vs. global) definiert und präzisiert. Die Kosinusfunktion wird mittels grafischen Ableitens als Ableitungsfunktion der Sinusfunktion herausgearbeitet.

Thema: *Ableitungsregeln für die Potenzfunktionen und ganzrationalen Funktionen - Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A4)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate • beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion) • leiten Funktionen graphisch ab • begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte, Wendepunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen • nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten • wenden die Summen- und Faktorregel auf ganzrationale Funktionen an • lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern oder Substituieren auf lineare und quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne digitale Hilfsmittel • verwenden das notwendige Kriterium und das Vorzeichenwechselkriterium zur Bestimmung von Extrempunkten und Wendestellen • unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich • verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen	Im Anschluss an Unterrichtsvorhaben II (Thema E-A2) wird die Frage aufgeworfen, ob mehr als numerische und qualitative Untersuchungen in der Differentialrechnung möglich sind. Für eine quadratische Funktion wird der Grenzübergang mit der „h-Methode“ durchgeführt. *Empfehlung: Durch Variation im Rahmen eines Gruppenpuzzles wenden die Schüler die h-Methode auf verschiedene quadratische Funktionen und auf die Funktion f(x)=x³ an. Dabei entdecken sie das Grundprinzip der Linearität und der Additivität. Durch Analyse des Rechenweges werden die Vermutungen erhärtet. Gegebenenfalls wird das allgemeine Vorgehen für die Funktion f(x)=x^n skizziert, um abschließend die Grundlagen der Ableitungsregeln fundiert erarbeitet zu haben.* Kontexte spielen in diesem Unterrichtsvorhaben eine untergeordnete Rolle, allerdings kann die gefundene Ableitungsfunktion mit dem Prinzip der grafischen Ableitung verknüpft werden um die rechnerische Methode mit der qualitativen Methode zu verknüpfen und vernetzen. *Die Motivation zur Beschäftigung mit Polynomfunktionen soll durch eine Optimierungsaufgabe geweckt werden. Die verschiedenen Möglichkeiten, eine Schachtel aus einem DIN-A4-Blatt herzustellen, führen insbesondere auf Polynomfunktionen vom Grad 3. Hier können sich alle bislang erarbeiteten Regeln bewähren. Außerdem kann hieran die Fragestellung nach der Berechnung von Extrema und nach der Frage nach dem generellen Verlauf einer ganzrationalen Funktion entwickelt werden.* Für ganzrationale Funktionen werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonieintervallen und der vier möglichen Vorzeichenwechsel an den Nullstellen der Ableitung untersucht. Die Schülerinnen und Schüler üben damit, vorstellungsbezogen zu argumentieren. Die Untersuchungen auf Symmetrien und Globalverhalten werden fortgesetzt.

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte): **Problemlösen** *Die Schülerinnen und Schüler* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (hier: Zurückführen auf Bekanntes) *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* **Argumentieren** *Die Schülerinnen und Schüler* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)* • berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen […]) *(Begründen)* • erkennen fehlerhafte Argumentationsketten und korrigieren sie *(Beurteilen)* **Werkzeuge nutzen** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwendenverschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen	Bezüglich der Lösung von Gleichungen im Zusammenhang mit der Nullstellenbestimmung wird durch geeignete Aufgaben Gelegenheit zum Üben von Lösungsverfahren ohne Verwendung des GTR gegeben. Hierbei werden die elementaren Standard-Faktorisierungsverfahren (besonders Ausklammern und das Substituieren biquadratischer Funktionsterme) eingeübt und ggf. auch noch fortgeschrittenere Techniken (Polynomdivision, Horner-Schema) vermittelt. *Der logische Unterschied zwischen notwendigen und hinreichenden Kriterien wird mit den Schülern an konkreten Beispielen illustriert.* Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms argumentieren. So erzwingt z. B. Achsensymmetrie die Existenz eines Extrempunktes auf der Symmetrieachse. Beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen können auch Tangentengleichungen bestimmt werden. Allgemein werden die Funktionseigenschaften aus E-A2 (wieder) aufgegriffen und fortgeführt, wie das Grenzverhalten der ganzrationalen Funktionen unter Einbeziehung von Geometriesoftware und gezielter Variation von Parametern. Die Anzahl der Nullstellen und die Bedeutung von deren Vielfachheit werden thematisiert. Das Symmetrieverhalten wird aufgegriffen und auf die Punktsymmetrie zum Ursprung ausgeweitet.

Einführungsphase Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

<table>
<tr><th colspan="2">Thema: Orientierung – Koordinatisierungen des Raumes (E-G1)</th></tr>
<tr><th>Zu entwickelnde Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
• wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum
• stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
• erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)

Kommunizieren
Die Schülerinnen und Schüler
• wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus (Produzieren)
• wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren)

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler
• nutzen Dynamische-Geometrie-Software (DGS)
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum Darstellen von Objekten im Raum</td><td>Mit Rückbezug auf das den Schülerinnen und Schülern bisher bekannte Koordinatensystem wird nun die Lage von Punkten im Raum betrachtet. Dazu kann im Einstieg das Klassenzimmer als Vereinfachung eines Koordinatensystems genutzt werden, in dem Punkte durch dreidimensionale Koordinaten angegeben werden.

Es sollte besonders darauf geachtet werden, dass die Schülerinnen und Schüler Punkte in ein räumliches Koordinatensystem einzeichnen können und darauf hingewiesen werden, dass Punkte im Schrägbild im Allgemeinen nicht eindeutig ablesbar sind.

Ein weiterer Schritt stellt die Betrachtung geometrischer Körper im Raum dar. Dazu können DGS oder eventuell reale Modelle (von Körpern oder des räumlichen Koordinatensystems) genutzt werden, um das räumliche Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler zu fördern. Durch Verwendung von DGS üben die Schülerinnen und Schüler außerdem das Nutzen solcher „Werkzeuge“.</td></tr>
</table>

Thema: *Umgang mit Vektoren und Vektoroperationen (E-G2)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • deuten Vektoren (in Koordinatendarstellung) als Verschiebungen und kennzeichnen Punkte im Raum durch Ortsvektoren • stellen gerichtete Größen (z.B. Geschwindigkeit, Kraft) durch Vektoren dar • berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes von Pythagoras • addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität • weisen Eigenschaften von besonderen Dreiecken und Vierecken mithilfe von Vektoren nach **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte)**: **Problemlösen** *Die Schülerinnen und Schüler* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* **Modellieren** *Die Schülerinnen und Schüler* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*	Im Anschluss kann die Verschiebung von Punkten im Raum betrachtet werden. Dazu können beispielsweise Verschiebungen von Schachfiguren auf dem Schachbrett, Verladungen von Containern oder auch Verschiebungen von Dreiecken im Raum diskutiert werden. Des Weiteren wird durch anwendungsbezogene Aufgaben (z.B. Flugbahn eines Heißluftballons, Bewegungen auf dem Wasser) aufgezeigt, dass Vektoren Geschwindigkeiten und Bewegungen beschreiben können. Solche Aufgaben fördern das Übertragen von realen Modellen auf die Mathematik. Ein Schwerpunkt des Unterrichtsvorhabens sind die elementaren Rechenoperationen für Vektoren (Vektoraddition und Vervielfachung von Vektoren durch Multiplikation mit skalaren Größen). Hintereinander ausgeführte Verschiebungen können durch eine neue Verschiebung beschrieben werden. Über das einfache Rechnen hinaus können anschaulich die vorhandenen Gruppen- und Vektorraumstrukturen und die damit bestehende Gültigkeit elementarer Rechenregeln und -gesetze verdeutlicht werden. Zudem wird die Länge von Vektoren herausgearbeitet. Dazu wird auf den bereits bekannten Satz des Pythagoras und die ebenfalls aus der Sek I bekannte Verallgemeinerung auf „Raumdiagonalen“ zurückgegriffen. Zum Abschluss werden einige Eigenschaften ebener Figuren (Dreiecke und Vierecke) untersucht. Beispielsweise können mithilfe der Vektorlänge Dreiecke auf Gleichschenklig-/-seitigkeit überprüft werden, Vierecksseiten zudem auf Parallelität. *Die Rechtwinkligkeit von Dreiecken kann mit Pythagoras überprüft werden, eine Einführung des Skalarprodukts findet an dieser Stelle noch nicht (sondern erst in der Q1) statt.*

Einführungsphase Stochastik (S)

Thema: *Den Zufall im Griff – Simulation und Modellierung von Zufallsprozessen (E-S1)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • deuten Alltagssituationen als Zufallsexperimente • simulieren Zufallsexperimente • verwenden Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen • stellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf und führen Erwartungswertbetrachtungen durch • beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Pfadregeln **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** **Modellieren** *Die Schülerinnen und Schüler* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor*(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu *(Mathematisieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)*	*Anknüpfend an die Reihe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung aus der Klasse 8 sollten die bisherigen Kenntnisse aus der Sek I rasch aufgefrischt und ergänzt werden. Bekannt sein sollten bzw. es sollte an folgende Grundbegriffe erinnert werden:* Zufallsexperimente (besonders LAPLACE- und BERNOULLI-Versuche), Ereignisse, Darstellungsformen mehrstufiger Experimente (besonders Baumdiagramme, reduzierte Bäume), Pfadregeln (Multiplikationsregel, Summenregel; Gegenereignisse) Vorkenntnisse zum PASCAL'schen Dreieck (und ggf. auch zu Binomialkoeffizienten) werden an dieser Stelle eingefügt in die kombinatorische Systematik der Urnenmodelle; hierbei werden grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge thematisiert. Gleichwohl sollte hier auf eine theorielastige und zu formale Aufstellung der Kombinatorik und ihrer Abzählmodelle verzichtet werden. Für die Weiterarbeit, auch in der Q-Phase, wird lediglich ein gründliches Verständnis der Binomialkoeffizienten (und ggf. der Fakultäten als ihre möglichen „Bausteine") benötigt. Als Kontexte für die Einführung der zentralen Begriffe (Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert) bieten sich sowohl einfache als auch komplexere (Glücks-) Spiele zur Vertiefung an; bei der Behandlung der Reihe sollte sich allerdings nicht allein auf Spielkontexte beschränkt werden. Besonders bei der Einführung des Begriffs Erwartungswert (als zu erwartender Mittelwert) bieten sich – neben Gewinnerwartungen bei Spielen – auch Beispiele aus ökonomischen Kontexten an. *Unter „Wahrscheinlichkeitsverteilungen" sind an dieser Stelle im Wesentlichen diskrete Verteilungen ohne feste Gesetzmäßigkeiten (z.B. asymmetrische Glücksräder) zu verstehen; ggf. kann schon die Binomialverteilung eingeführt werden – eine Vertiefung sowie die Betrachtung weiterer dis-*

Werkzeuge nutzen *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden den GTR (TI-Nspire: neben der Rechner-Umgebung besonders auch die Listen/Tabellenkalkulation sowie die Umgebung zu Daten/Statistik) als digitales Werkzeug zum …Generieren von Zufallszahlen …Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen …Erstellen der Histogramme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen …Berechnen der Kennzahlen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Erwartungswert) • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden, Berechnen und Darstellen • reflektieren und begründen Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge	*kreter Standard-Verteilungen erfolgt dann in der Q-Phase. Auf eine formale Definition von Erwartungswerten (→ Q-Phase) kann hier ebenso noch verzichtet werden, sondern dies sollte hauptsächlich an Beispielen ohne gesetzmäßige Verteilung erfolgen.* *Im Gegensatz zum Lehrplan können in der Zentralklausur (vgl. Beispielaufgaben) sehr wohl Schreibweisen mit Zufallsgrößen auftreten; diese sollten dann knapp und ohne großen formalen Hintergrund an dieser Stelle erläutert werden, eine Vertiefung erfolgt in der Qualifikationsphase.* *Während in der Sek I ein Schwerpunkt auf expliziten händischen Simulationen von Zufallsexperimenten liegt, sollte hier – auch aus Zeitgründen – größerenteils darauf verzichtet werden. Stattdessen sind sowohl Zeitpunkt als auch Thematik sehr gut geeignet, den GTR intensiv einzusetzen und kennenzulernen: Neben einfachen Berechnungen und erster Orientierung bei Notationen (z.B. Binomialkoeffizient, -verteilung) bietet sich eine Einführung in den Umgang mit Listen in der Tabellenkalkulationsumgebung sowie in den Bereich Daten/Statistik an, in dem verschiedene Darstellungsformen (besonders Histogramme) erarbeitet werden können.* Außerdem sollte der Rechner mit seinen verschiedenen random-Befehlen als (Pseudo-)Zufallsgenerator erfahrbar werden; an dieser Stelle sollte sich aber zumindest auch einmal kritisch mit der deterministischen Erzeugung von (Pseudo!-)Zufallszahlen auseinandergesetzt werden.

Thema: *Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten (E-S2)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • modellieren Sachverhalte mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vier- oder Mehrfeldertafeln • bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten • prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit • bearbeiten Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten. **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** **Modellieren** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung*(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* **Kommunizieren** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten […] *(Rezipieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)* • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtilch ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren)* • führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei *(Diskutieren)*	*Als Kontexte zur Erarbeitung und Vertiefung des fachlichen Inhaltes könnten Test- und Diagnoseverfahren für „seltene Erkrankungen“ dienen (z.B. HIV) oder – nicht ganz so ernst! – Schwangerschaftstests. Daneben sollten als Kontext und methodische Übung zum Leseverstehen auch diverse Zeitungsartikel (aus dem Lehrbuch oder gern auch authentisches Material) genutzt werden, um fehlende Informationen aus zweistufigen (selten auch: mehrstufigen) Untersuchungen zu erschließen.* Als Einstieg kann zur Förderung des Verständnisses der Wahrscheinlichkeitsaussagen die parallele Darstellung mit absoluten Häufigkeiten als Hilfe verwendet werden. Außerdem ist bei den ersten Beispielen die parallele Betrachtung und Verknüpfung der verschiedenen Darstellungsformen (Baumdiagramm – umgekehrte Bäume, Vier-/ Mehrfeldertafel) sinnvoll, so dass die Schüler bei der Anwendung zwischen diesen Formen wechseln können. Es sollte zumindest ein Beispiel betrachtet werden, was über eine Vierfeldertafel hinausgeht. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A\cap B)$ („Und-Wahrscheinlichkeiten“) und vom Typ $P(A\|B)$(bedingte Wahrscheinlichkeiten) – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung. Formale Schreibweisen können dabei eingeführt werden, wenn sie als hilfreich erachtet werden; mengentheoretische Betrachtungen gehören allerdings nicht vertieft an diese Stelle. Mit dem zentralen Begriff der stochastischen Unabhängigkeit können ein (kurzer) Rückbezug und die Verknüpfung mit der vorangegangenen Sequenz (E-S1) in Bezug auf Verteilungen (mit/ohne Zurücklegen) sowie die Abgrenzung zwischen Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung erfolgen. Als Abschluss der Einheit könnte der Satz von BAYES dienen; eine formale Erarbeitung (über den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit) und Darstellung ist an dieser Stelle allerdings nicht notwendig.

2.2.1 Übersicht über die Unterrichtsvorhaben in der Qualifikationsphase

Die Übersichten und Konkretisierungen enthalten sowohl die Grundkurs- als auch Leistungskursinhalte; letztere sind als Additum in rot hervorgehoben. An wenigen Stellen gibt es größere Abweichungen, wo dann die Grundkursinhalte in blau gekennzeichnet und getrennt von den Leistungskursinhalten aufgeführt sind.

Qualifikationsphase - Grundkurs		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
Q1-I	GK/LK-A1	15 / 20
Q1-II	GK/LK-A2	9 / 10
Q1-III	GK/LK-A3	12 / 20
***Ziel-/Zeitvorgabe**: Der Analysisblock zur Integralrechnung(A1 bis A3) sollte bis zu den Weihnachtsferien unterrichtet werden.*		
Q1-IV	GK/LK-A4	9 / 20
Q1-V	GK/LK-A5	6 / 10 (+ 6 / 10 in Q2)
***Ziel-/Zeitvorgabe**: Der zweite Analysisblock zu den Exponentialfunktionen (A4, A5) sollte im Februar abgeschlossen werden, so dass der erste Geometrieblock (G1) noch vor den Osterferien bearbeitet und abgeschlossen werden kann.*		
Q1-VI	GK/LK-G1	12 / 15
Q1-VII	GK/LK-G2	9 / 15
Q1-VIII	GK/LK-G3	9 / 15 (+5 in Q2)
Q1-IX	GK/LK-G4	6 / 10 (+5 in Q2)
***Ziel-/Zeitvorgabe**: Die Lineare Algebra/Analytische Geometrie sollte im GK in der Q1 abgeschlossen sein; durch den insgesamt größeren Umfang (mehr Ebenendarstellungen und Lagebeziehungen) ist es im LK durchaus sinnvoll, das Thema zumindest noch klausurrelevant im ersten Quartal der Q2 zu behandeln.*		
Q2-I	GK/LK-S1	12 / 15
***Ziel-/Zeitvorgabe**: Die (stochastisch motivierte) Matrizenrechnung (GK-S1) sowie ggf. die Lineare Algebra.(Fortsetzung im LK) sollten spätestens mit den Herbstferien abgeschlossen sein.*		
Q2-II	GK/LK-S2	6 / 5
Q2-III	GK/LK-S3	9 / 10
***Ziel-/Zeitvorgabe**: Die Stochastik bis zur Binomialverteilung sollte bis zu den Weihnachtsferien geschafft werden. Im letzten Halbjahr kann dann, besonders bei einer Stundenaufteilung im LK, auch parallel zur Stochastik und im Hinblick auf die Vorabiturklausur damit begonnen werden, Analysis zu wiederholen.*		
Q2-IV	GK-S4 / LK-S4	12 / 5
Q2-V	LK-S5	10
Q2-VI	LK-S6	15
Q2-VII	GK/LK-A6	9 / 10
Q2-VIII	GK/LK-A7 (siehe A5)	6 / 10
	Summe:	Q1: 87 / 135, Q2: 54 / 90

Referenzen zu den Unterrichtsvorhaben im Lehrbuch:

- Elemente der Mathematik, NRW Qualifikationsphase (2011) GK/LK, ISBN 978-3-507-87900-3 – im Folgenden kurz „EdM11“ im Übersichtsraster in orange.
- Elemente der Mathematik, NRW Qualifikationsphase (2015) GK, ISBN 978-3-507-87982-9 – im Folgenden kurz „EdM15“) im Übersichtsraster in blau.
- Elemente der Mathematik, NRW Qualifikationsphase (2015) LK, ISBN 978-3-507-87991-1 – im Folgenden kurz „EdM15“) im Übersichtsraster in rot.

Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben Qualifikationsphase GK/LK

Qualifikationsphase (Q1) – GRUNDKURS / LEISTUNGSKURS	
Unterrichtsvorhaben Q1-I : **Thema**: *Funktionen beschreiben Formen – Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (Q-GK/LK-A1)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfelder**: Funktionen und Analysis (A) Lineare Algebra (G) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Funktionen als mathematische Modelle • Lineare Gleichungssysteme **Zeitbedarf**: 15 Std. / 20 Std. EdM11 Kapitel 1 (S.19-50) EdM15 Kapitel 1.1, 1.3-1.5 (S.10-35 und S.42-67) EdM15 Kapitel 1.1.1-1.1.4, 1.3-1.6 (S.12-39 und S.53-85)	*Unterrichtsvorhaben Q1-II:* **Thema:** *Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-GK/LK-A2)* **Zentrale Kompetenzen:** • Kommunizieren **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Grundverständnis des Integralbegriffs **Zeitbedarf**: 9 Std. / 10 Std. EdM11 Kapitel 2.1 (S.51-69) EdM15 Kapitel 2.1-2.2 (S.68-79) EdM15 Kapitel 2.1-2.2 (S.86-98)
Unterrichtsvorhaben Q1-III: **Thema**: *Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q-GK/LK-A3)* **Zentrale Kompetenzen**: • Argumentieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Integralrechnung **Zeitbedarf**: 12 Std. / 20 Std. EdM11 Kapitel 2.2-2.4 (S.70-100) EdM15 Kapitel 2.3-2.5 (S.80-101) EdM15 Kapitel 2.3-2.7 (S.99-141)	*Unterrichtsvorhaben Q1-IV:* **Thema:** *Natürlich: Exponentialfunktionen (Q-GK/LK-A4)* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Fortführung der Differentialrechnung **Zeitbedarf**: 9 Std. / 20 Std. EdM11 Kapitel 3 (S.117-168) EdM15 Kapitel 3.1 (S.108-130) EdM15 Kapitel 3.1 (S.142-176)

Unterrichtsvorhaben Q1-V: **Thema:** *Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-GK/LK-A5)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Fortführung der Differentialrechnung **Zeitbedarf**: 12 Std. / 20 Std. (davon ca. 6 Std. /10. Std. in Q2.2) EdM11 Kapitel 4.1-4.4 (S.169-198) EdM15 Kapitel 3.2 (S.131-151) EdM15 Kapitel 3.2 (S.177-211)	*Unterrichtsvorhaben Q1-VI:* **Thema:** *Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden (Q-GK/LK-G1)* **Zentrale Kompetenzen**: • Modellieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Geraden) **Zeitbedarf:** 12 Std. / 15 Std. EdM11 Kapitel 5 (S.209-246) EdM15 Kapitel 4.1 (S.152-172) EdM15 Kapitel 4.1 (S.212-232)
Unterrichtsvorhaben Q1-VII: **Thema:** *Lagebeziehungen bei geradlinig bewegten Objekten und Bestimmung von Abständen und Schnittwinkeln (Q-GK/LK-G2)* **Zentrale Kompetenzen**: • Argumentieren • Kommunizieren **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Lagebeziehungen zwischen Geraden • Skalarprodukt und Anwendungen **Zeitbedarf:** 9 Std. / 15 Std. EdM11 Kapitel 6.1 (S.247-266) EdM15 Kapitel 4.2-4.3 (S.173-201) EdM15 Kapitel 4.2-4.3 (S.233-265)	*Unterrichtsvorhaben Q1-VIII:* **Thema:** *Die Beschreibung von Ebenen und Lineare Algebra als Schlüssel zur Lösung von geometrischen Problemen (Q-GK/LK-G3)* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Kommunizieren **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Ebenen) **Zeitbedarf:** 9 Std. / 15 Std. (ggf. Fortsetzung zu Beginn der Q2) EdM11 Kapitel 6.2-6.4 (S.269-316) EdM15 Kapitel 4.4 (S.201-217) EdM15 Kapitel 5 (S.266-319)

Unterrichtsvorhaben Q1-IX : **Thema***: Untersuchung von Polygonen und Polyedern (Q-GK/LK-G4)* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Skalarprodukt • Abstände und Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten **Zeitbedarf:** 6 Std. / 10 Std. (ggf. Fortsetzung zu Beginn der Q2) EdM11 Kapitel 6.2-6.4 (S.269-316) EdM15 Kapitel 4.4 (S.201-223) EdM15 Kapitel 5 (S.266-319)	
Summe Qualifikationsphase (Q1) – GK 87 Stunden / LK 135 Stunden	

Qualifikationsphase (Q2) – GRUNDKURS / LEISTUNGSKURS	
Unterrichtsvorhaben Q2-0 : Fortsetzung und Abschluss der Linearen Algebra und Geometrie im Leistungskurs (Q-LK-G3/G4) **Zeitbedarf:** 10 Std. EdM11 Kapitel 6.2-6.4 (S.269-316) EdM15 Kapitel 5 (S.266-319)	*Unterrichtsvorhaben Q2-I :* **Thema:** *Von Übergängen und Prozessen (Q-GK/LK-S1)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Argumentieren **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Stochastische Prozesse **Zeitbedarf:** 12 Std. / 15 Std. EdM11 Kapitel 7.1-7.2.1 (S.317-346) EdM15 Kapitel 6.3 (S.301-316) EdM15 Kapitel 7.4 (S.442-457)

<u>Unterrichtsvorhaben Q2-II:</u> **Thema:** *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen(Q-GK/LK-S2)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen **Zeitbedarf:** 6 Std. / 5 Std. EdM11 Kapitel 8.1-8.2 (S.375-404) EdM15 Kapitel 5.1-5.2 (S.224-244) EdM15 Kapitel 6.1-6.2 (S.320-352)	*<u>Unterrichtsvorhaben Q2-III:</u>* **Thema:** *Treffer oder nicht? – Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen (Q-GK/LK-S3)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Binomialverteilung **Zeitbedarf:** 9 Std. / 10 Std. EdM11 Kapitel 8.3.1-8.3.2 (S.405-419) EdM15 Kapitel 5.3.1-5.3.2 (S.245-261) EdM15 Kapitel 6.3 (S.353-385)
<u>Unterrichtsvorhaben Q2-IV:</u> **Thema:** *Modellieren mit Binomialverteilungen (Q-GK-S4)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Argumentieren **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Binomialverteilung **Zeitbedarf:** 12 Std. EdM11 Kapitel 8.3.3-9.1 (S.420-468) EdM15 Kapitel 5.3.3—6.2 (S.262-300)	*<u>Unterrichtsvorhaben Q2-IV:</u>* **Thema:** *Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (Q-LK-S4)* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Binomialverteilung **Zeitbedarf:** 5 Std. EdM11 Kapitel 8.3.3-8.5 (S.420-456) EdM15 Kapitel 7.1 (S.386-402)

Unterrichtsvorhaben Q2-V:	Unterrichtsvorhaben Q2-VI:
Thema: *Ist die Glocke normal? (Q-LK-S5)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Normalverteilung **Zeitbedarf:** 10 Std. EdM11 Kapitel 9.4 (S.500-518) EdM15 Kapitel 7.2 (S.403-419)	**Thema:** *Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen (Q-LK-S6)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Kommunizieren **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Testen von Hypothesen **Zeitbedarf:** 15 Std. EdM11 Kapitel 9.1-9.2 (S.457-487) EdM15 Kapitel 7.3 (S.420-441)
Unterrichtsvorhaben Q2-VII: **Thema**: *Optimierungsprobleme (Q-GK/LK-A6)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Problemlösen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Funktionen als mathematische Modelle • Wiederholung der Differentialrechnung **Zeitbedarf**: 9 Std. / 10 Std. EdM11 Kapitel 4.6 (S.202-206) EdM15 Kapitel 1.2 (S.36-41) EdM15 Kapitel 1.2 (S.44-50)	*Unterrichtsvorhaben Q2-VIII:* **Thema:** *Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-GK/LK-A7)* *[inhaltliche Ausführungen: siehe A5]* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Wiederholung der Integralrechnung • Abiturvorbereitung Analysis **Zeitbedarf**: 6 Std. / 10 Std. EdM11 Kapitel 4.1-4.5 (S.169-201) EdM15 Kapitel 3.2 (S.131-151) EdM15 Kapitel 1.1.5 (S.40-43) und Kapitel 3.2 (S.177-211)
Summe Qualifikationsphase (Q2) – GK: 54 Stunden / LK: 90 Stunden	

Qualifikationsphase Grundkurs/Leistungskurs Funktionen und Analysis (A)

<table>
<tr><td colspan="2">Thema: Funktionen beschreiben Formen - Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (Q-GK/LK-A1)</td></tr>
<tr><td>Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
• bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“)
• beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung
• verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von
• Extrem- und Wendepunkten
• beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
• wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
• erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
• treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor(Strukturieren)
• übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)</td><td>Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“

Anknüpfend an die Einführungsphase (vgl. Thema E-A1) werden an einem Beispiel in einem geeigneten Kontext (z. B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Anschließend werden aus gegebenen Punkten Gleichungssysteme für die Parameter der Normalform aufgestellt.

Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z. B. Trassierungsprobleme gewählt werden; die Begriffe der Knick- und Ruckfreiheit dienen hier der Anschauung.

Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet.

Designobjekte oder architektonische Formen können zum Anlass genommen werden, die Funktionsklassen zur Modellierung auf ganzrationale Funktionen 3. oder 4. Grades zu erweitern und über gegebene Punkte, Symmetrieüberlegungen und Bedingungen an die Ableitung Gleichungen zur Bestimmung der Parameter aufzustellen. Hier bieten sich nach einem einführenden Beispiel offene Unterrichtsformen (z. B. Lerntheke) an. Denkbar ist auch der Einstieg über wirtschaftsmathematische Fragestel-</td></tr>
</table>

• beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation*(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung*(Validieren)* • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen*(Validieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden […], Berechnen und Darstellen	*lung im Rahmen von Produktionsprozessen. So können Kosten- und Erlösfunktionen unter verschiedenen Prämissen modelliert und bzgl. des möglichen Gewinns optimiert werden. Die Grundzüge von „Steckbriefaufgaben“ können in sinnvollen betriebswirtschaftlichen Zusammenhängen eingeübt werden unter gleichzeitig Einführung neuer Begrifflichkeiten. z.B. ertragsgesetzliche Kostenfunktion (ganzrationale Funktionen dritten Grades), neoklassische Kostenfunktion (ganzrationale Funktion zweiten Grades), Fixkosten, Output etc. Diese können dann kontextbezogen diskutiert werden, indem sie mittels der in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen bewertet werden.* *Im Leistungskurs bieten sich Vertiefungen, wie bspw. Untersuchung der Kostenelastizität an. Gerade im Leistungskurs sind hier auch projektbezogene längerfristige Aufgabenstellungen gut machbar, bei denen bspw. Absatzzahlen aus der Tageszeitung untersucht und unter betriebswirtschaftlichen Fragestellungen modifiziert werden. Hier haben die Schüler deutlichen Spielraum, Grundannahmen selbst vorzunehmen.* Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. *Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, das Gaußverfahren zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchzuführen.* Über freie Parameter (aus unterbestimmten Gleichungssystemen) werden Lösungsscharen erzeugt und deren Elemente hinsichtlich ihrer Eignung für das Modellierungsproblem untersucht und beurteilt. An innermathematischen „Steckbriefen“ werden Fragen der Eindeutigkeit der Modellierung und der Einfluss von Parametern auf den Funktionsgraphen untersucht.

Thema: *Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-GK/LK-A2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe • deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext • skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus […] mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtextensowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)* • wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus*(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen*(Produzieren)* • dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar*(Produzieren)* • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie*(Produzieren)*	*Hinweis: Auch im Leistungskurs bilden eigene anschauliche Erfahrungen ein gutes Fundament für den weiteren Begriffsaufbau. Deshalb hat sich die Fachkonferenz für einen ähnlichen Einstieg in die Integralrechnung im Leistungskurs entschieden wie im Grundkurs. Er unterscheidet sich allenfalls durch etwas komplexere Aufgaben von der Einführung im Grundkurs* Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb sollten hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen werden (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert. Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Falls die Lernenden entdecken, welche Auswirkungen dieser Umkehrprozess auf die Funktionsgleichung der „Bilanzfunktion“ hat, kann dies zur Überleitung in das folgende Unterrichtsvorhaben genutzt werden. *Hier könnten bspw. in einer arbeitsteiligen Gruppenarbeit unterschiedlich ausgewählte Funktionsgraphen im Sachzusammenhang Spielraum für verschiedene Varianten geboten werden. So können nicht nur unterschiedliche Verfahren zur Flächenberechnung entwickelt werden, sondern auch das Verständnis für die Untersuchung von Wirkungen und dem Rückschluss von der Änderungsrate in unterschiedlichen Kontexten auf den Bestand gefestigt werden. Bei der Vorstellung im Plenum können dann Vor- und Nachteile der einzelnen numerischen Verfahren bewertet werden. Als Kriterien können die Angemessenheit für das konkrete Bei-*

	spiel, die Einfachheit und die Verallgemeinerbarkeit herangezogen werden. Leitfrage für die Weiterarbeit könnte dann sein, ob sich eine Idee herauskristallisiert, die bei allen Verfahren anwendbar ist, bzw. welche Kriterien dafür erfüllt sein müssten. Die Ergebnisse der Gruppenarbeit können auf Plakaten festgehalten und in einem Museumsgang präsentiert werden. *Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert.* Geeignete Simulationen bieten sich zur Veranschaulichung der Intervallschachtelung an. (z.B. http://www.vias.org/simulations/simusoft_riemannsum.html) Im Leistungskurs sollte die Berechnung der Produktsummen auch mit allgemeinen Intervallgrenzen [0;a] oder komplexeren Funktionen durchgeführt werden. Hier bietet sich auch ein Exkurs zu Folgen/Reihen („Summe der ersten n Quadrate") an.

Thema: *Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q-GK/LK-A3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs • erläutern geometrisch-anschaulich den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) • nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen • bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen • bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate • bestimmen Flächeninhalte mit Hilfe von bestimmten Integralen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf *(Vermuten)* • unterstützen Vermutungen beispielgebunden *(Vermuten)* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)*	Schülerinnen und Schüler sollen hier (wieder-)entdecken, dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist.Dazu kann das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben (vgl. Thema Q-GK-A2) entwickelte numerische Näherungsverfahren auf den Fall angewendet werden, dass für die Änderungsrate ein Funktionsterm gegeben ist. *Die Graphen der Änderungsrate und der Bestandsfunktion können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe einer Tabellenkalkulation und eines Funktionenplotters gewinnen, vergleichen und Beziehungen zwischen diesen herstellen.* Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert (ggf. auch im Lehrervortrag). Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet. (z. B. durch ein sog. Funktionendomino) In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Gesamtbeständen zur Verfügung. Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen in der Regel numerisch mit dem GTR bestimmt. Komplexere Übungsaufgaben sollten am Ende des Unterrichtsvorhabens

Werkzeuge nutzen *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen […] digitale Werkzeuge *[Erg. Fachkonferenz: Tabellenkalkulation und Funktionenplotter]*zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen • Verwendenverschiedene digitale Werkzeuge zum … Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse … Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals	bearbeitet werden, um Vernetzungen mit den Kompetenzen der bisherigen Unterrichtsvorhaben (Funktionsuntersuchungen, Aufstellen von Funktionen aus Bedingungen) herzustellen. Im Leistungskurs sollte neben anschaulicher Herangehensweise mehr auf höhere formale und fachliche Korrektheit geachtet werden. Die Schülerinnen und Schüler sollten die Integralfunktion J_a als eine Stammfunktion der Randfunktion erkennen. Um diesen Zusammenhang zu begründen, wird der absolute Zuwachs $J_a(x+h) – J_a(x)$ geometrisch durch Rechtecke nach oben und unten abgeschätzt. Der Übergang zur relativen Änderung mit anschließendem Grenzübergang führt dazu, die Stetigkeit von Funktionen zu thematisieren, und motiviert, die Voraussetzungen zu präzisieren und den Hauptsatz formal exakt zu notieren. *Hier bieten sich Möglichkeiten zur inneren Differenzierung:* *Formalisierung der Schreibweise bei der Summenbildung, exemplarische Einschachtelung mit Ober- und Untersummen, formale Grenzwertbetrachtung, Vergleich der Genauigkeit unterschiedlicher Abschätzungen.* Im Leistungskurs sollten zudem Rotationskörper thematisiert werden. Die Einführung empfiehlt sich analog zur Flächenberechnung. *Methodisch ist auch hier Projektarbeit unter einem Oberthema (z.B. Design einer Vase/eines Glases mit bestimmten Volumen) denkbar. Vorgaben zum Materialverbrauch schaffen hier weitere Komplexität.* *Desweiteren könnte der Mittelwertsatz zur Ergänzung der Grundvorstellung des Integrals erarbeitet werden.*

Thema: *Natürlich: Exponentialfunktionen (Q-GK/LK-A4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion • nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion • untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze • interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang • wenden die Produkt- und Kettenregel an • bilden die Ableitungen weiterer Funktionen: ○ natürliche Funktionen ○ Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis ○ natürliche Logarithmusfunktion • nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion: $x \rightarrow 1/x$. **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (Erkunden) • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen) • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme) (Lösen)	*Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens sollte eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte z. B. in Gruppenarbeit mit Präsentation stehen (Wachstum und Zerfall).* Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Die Eulersche Zahl kann z. B. über das Problem der stetigen Verzinsung. eingeführt werden. Der Grenzübergang wird dabei zunächst durch den GTR unterstützt. Da der Rechner dabei numerisch an seine Grenzen stößt, wird aber auch eine Auseinandersetzung mit dem Grenzwertbegriff motiviert. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. In einem Tabellenkalkulationsblatt wird für immer kleinere h das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet. Umgekehrt suchen die Lernenden zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle. *Dazu könnten sie eine Wertetabelle des Differenzenquotienten aufstellen, die sie immer weiter verfeinern oder in der Grafik ihres GTR experimentieren, indem sie Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion legen. Mit diesem Ansatz kann in einem DGS auch der Graph der Ableitungsfunktion als Ortskurve gewonnen werden.* Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich quasi automatisch die Frage, für welche Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen. Nach Einführung der Kettenregel (Hierbei wird auch die „h-Methode“ ver-

• führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (Lösen)
• variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung (Reflektieren).
Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler
• Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
    ○ zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
    ○ grafischen Messen von Steigungen
• entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus
• nutzen […] digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen
	tiefend geübt.) können dann auch allgemeine Exponentialfunktionen abgeleitet werden. Vervollständigt werden die Ableitungsregeln dann durch die Produktregel, um auch höhere Ableitungen bilden zu können.
	Umkehrprobleme im Zusammenhang mit der natürlichen Exponentialfunktion werden genutzt, um den natürlichen Logarithmus zu definieren und damit auch alle Exponentialfunktionen auf die Basis e zurückzuführen.
	Eine Vermutung zur Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion wird graphisch geometrisch mit einem DGS als Ortskurve gewonnen und anschließend mit der Kettenregel bewiesen.

Thema: *Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-GK/LK-A5)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze und interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext (GK) bzw. • verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsvorgängen und vergleichen die Qualität der Modellierung exemplarisch mit einem begrenzten Wachstum • bilden die Ableitungen weiterer Funktionen: - Potenzfunktionen mit ganzzahligen und rationalen Exponenten • bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) • führen Eigenschaften von zusammengesetzten Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) argumentativ auf deren Bestandteile zurück • wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit (nicht nur) linearen Funktionen an • wenden die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen an • bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen oder Nachschlagewerken entnommenen Stammfunktionen und (im GK) numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)*	Im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen durch natürliche Exponentialfunktionen mit (nicht nur) linearen Exponenten wird der Umgang mit der Kettenregel vertieft. Als Beispiel für eine Summenfunktion eignet sich die Modellierung einer Kettenlinie. An mindestens einem Beispiel sollte auch ein beschränktes Wachstum untersucht werden. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich deren Verhalten für betragsgroße Argumente erarbeitet. In diesen Kontexten ergeben sich ebenfalls Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird. Weitere Kontexte bieten Anlass zu komplexen Modellierungen mit Funktionen anderer Funktionenklassen, insbesondere unter Berücksichtigung von Parametern, für die Einschränkungen des Definitionsbereiches oder Fallunterscheidungen vorgenommen werden müssen. Im GK werden Parameter nur in konkreten Kontexten und nur exemplarisch variiert (keine systematische Untersuchung von Funktionenscharen). Dabei werden z. B. zahlenmäßige Änderungen des Funktionsterms bezüglich ihrer Auswirkung untersucht und im Hinblick auf den Kontext interpretiert. **Hinweis:** Die Betrachtung von Funktionenscharen bietet sich für die Wiederholung der Analysis in Q2.2 an.

• übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sach-situationen zu *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validie-ren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung*(Validieren)* • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Vali-dieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen An-nahmen*(Validieren)*	

Thema: *Optimierungsprobleme (Q-GK/LK-A6)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese **Prozessbezogene Kompetenzen:** *Modellieren* *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor.*(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation*(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung*(Validieren)* • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation*(Erkunden)* • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“** Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. *Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen.* Grad und Formen der begleitenden Unterstützung durch die Lehrkraft variieren je nach Kursart. Die Schüler sollten die Möglichkeit haben, unterschiedliche Lösungswege zu entwickeln und zu diskutieren. Im Grundkurs erfolgt dies in der Regel an Problemen, die auf quadratische Zielfunktionen führen. Hierbei bietet es sich außerdem an, Lösungsverfahren auch ohne digitale Hilfsmittel einzuüben. An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“). Ein Verpackungsproblem (Dose oder Milchtüte) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik untersucht. *Abschließend empfiehlt es sich, ein Problem zu behandeln, das die Schülerinnen und Schüler nur durch systematisches Probieren oder anhand des Funktionsgraphen lösen können: Aufgabe zum „schnellsten Weg“.* Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z. B. Neuverschuldung und Schulden oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Im Zusammenhang mit geometrischen und ökonomischen Kontexten wird die Anwendung der Produkt- und Kettenregel, insbesondere bei Wurzel-

…) aus, um die Situation zu erfassen*(Erkunden)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern …)*(Lösen)* • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)* • berücksichtigen einschränkende Bedingungen*(Lösen)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)*	funktionen**,** vertieft.

Thema: *Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden (Q-GK/LK-G1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar • interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext • stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle*(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen*(Validieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen Geodreiecke […] geometrische Modelle und Dynamische-	Vor dem Einstieg in die Parametrisierung von Geraden bietet sich eine Wiederholungseinheit der Themen der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra aus der Einführungsphase an. Es werdendie Koordinatisierung des Raumes und der Vektorbegriff wiederholt, wobei sowohl der Verschiebungsvektor inklusive der Rechenoperationen Vektoraddition und Skalarmultiplikation als auch der Begriff des Ortsvektors nochmals angesprochen werden. Geradlinigegleichförmige Bewegungen im Raum werden z. B. im Kontext von Flugrouten von Flugzeugen, Tauchrouten von U-Bootenoder Flugbahnen von Projektilen durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der sich bewegenden Objekte) einbezogen werden. *Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren.* In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z. B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Ergänzend zum anwendungsbezogenen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Durch Einschränkung des Definitionsbereiches werden auch Strecken

Geometrie-Software • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden … Darstellen von Objekten im Raum	und Strahlen einbezogen. Punktproben sowie erste Berechnungen von Schnittpunkten mit den Grundebenen sollen auch hilfsmittelfrei durchgeführt werden. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden. *Auf dieser Grundlage können z. B. auch Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden. Der Einsatz der DGS bietet hier die zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann. Inhaltlich schließt die Behandlung von Schrägbildern an das Thema E-G1 an.*

Thema: *Lagebeziehungen bei geradlinig bewegten Objekten und Bestimmung von Abständen und Schnittwinkeln (Q-GK/LK-G2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • untersuchen Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden […] • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober- / Unterbegriff) *(Begründen)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) *(Begründen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/Unterbegriff) *(Begründen)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* ***Kommunizieren***	*Hinweis: Bei zweidimensionalen Abbildungen räumlicher Situationen geht in der Regel die Information über die Lagebeziehung von Objekten verloren. Verfeinerte Darstellungsweisen (z. B. unterbrochene Linien, schraffierte Flächen, gedrehtes Koordinatensystem) helfen, dies zu vermeiden und Lagebeziehungen systematisch zu untersuchen.* Die Berechnung des Schnittpunkts zweier Geraden ist eingebettet in die Untersuchung von Lagebeziehungen. Die Existenzfrage führt zur Unterscheidung der vier möglichen Lagebeziehungen. Der Fokus der Untersuchung von Lagebeziehungen liegt auf dem logischen Aspekt einer vollständigen Klassifizierung sowie einer präzisen Begriffsbildung (z. B. Trennung der Begriffe „parallel“, „echt parallel“, „identisch“). Flussdiagramme und Tabellen sind ein geeignetes Mittel, solche Algorithmen darzustellen. Es werden möglichst selbstständig solche Darstellungen entwickelt, die eventuell auf Lernplakaten dokumentiert, präsentiert, verglichen und hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit beurteilt werden können. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens können nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt werden, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache angeregt werden. Als Kontext kann dazu die Modellierung von Flugbahnen aus Q-G1 wieder aufgegriffen werden. Dabei wird auch die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten relevant. Dies motiviert die Beschäftigung mit orthogonalen Hilfsgeraden und die Einführung des Skalarproduktes, das alternativ aber auch über den

Die Schülerinnen und Schüler • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)* • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)* • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)* • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren)*	Schnittwinkel von zwei Geraden eingeführt werden kann. Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Beispielsweise durch eine Zerlegung eines Vektors in parallele und orthogonale Komponenten wird die Berechnung des Winkels über den Kosinus hergeleitet (alternativ zu einer Herleitung aus dem Kosinussatz).Gleichzeitig wird hier die aus der Einführungsphase bekannte Längenberechnung eines Vektors wiederholt. Nachdem die Formel für den Winkel hergeleitet worden ist, steht ein weiteres Mittel zur Verfügung die Lage zweier sich schneidender Geraden durch den Winkel zu präzisieren. *Außerdem kann bei genügend zur Verfügung stehender Zeit oder binnendifferenziert (über den Kernlehrplan hinausgehend) das Abstandsminimum von Flugbahnen nun numerisch, grafisch oder algebraisch mit den Verfahren der Analysis ermittelt werden.* Begrifflich davon abgegrenzt wird der Abstand zwischen den Flugbahnen, der hier bereits über das Lotfußpunktverfahren mit behandelt werden kann. Die formale Frage nach der Bedeutung eines Produktes von zwei Vektoren sowie den dabei gültigen Rechengesetzen wird im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z. B. Division durch einen Vektor) gestellt.

Thema: *Die Beschreibung von Ebenen und Lineare Algebra als Schlüssel zur Lösung von geometrischen Problemen (Q-GK/LK-G3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Ebenen in Parameterform dar • stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind • interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen • stellen Ebenen in Koordinatenform dar • stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum • untersuchen Lagebeziehungen […] zwischen Geraden und Ebenen • berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Problemsituation*(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*	Als Einstieg für die Parametrisierung einer Ebene kann z. B. eine konkrete Ebene im Klassenraum dienen. Die Richtungsvektoren beschreiben dabei ein im Allgemeinen schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene, die beiden Parameter können als neue Koordinaten der Punkte in der Ebene in diesem Koordinatensystem gedeutet werden. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G1 wieder aufgegriffen. *Wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, können auch hier durch Einschränkung des Definitionsbereichs Parallelogramme und Dreiecke beschrieben und auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden, die über die Kompetenzerwartungen des KLP hinausgehen.* In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösekompetenzen erworben, indem sich heuristische Strategien bewusst gemacht werden (eine planerische Skizze anfertigen, die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt beschreiben, geometrische Hilfsobjekte einführen, bekannte Verfahren zielgerichtet einsetzen und in komplexeren Abläufen kombinieren und unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt vergleichen). Punktproben sowie die Berechnung von Spurgeraden in den Grundebenen und von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen führen zunächst noch zu einfachen Gleichungssystemen. Die Achsenabschnitte erlauben eine Darstellung in einem räumlichen Koordinatensystem. *Über den Kernlehrplan hinausgehend können auch im Grundkurs die Darstellung der Ebene in Normal- und Koordinatenform thematisiert werden. Dies hat den Vorteil, dass eine weitere Anwendung des Skalarproduktes deutlich wird und dass Berechnungen wie der Durchstoßpunkt einer Geraden mit einer Ebene wesentlich effizienter durchgeführt wer-*

• wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Verallgemeinern)*(Lösen)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)* • analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)* • variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung *(Reflektieren)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)* • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)* • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)* • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen … Durchführen von Operationen mit Vektoren und Matrizen	*den können. Ebenso kann das Vektorprodukt eingeführt werden, so dass eine Koordinatengleichung sehr effizient aus einer Parameterdarstellung berechnet werden kann. Außerdem kann damit auch eine Thematisierung des Winkels zwischen Gerade und Ebene stattfinden.* Eine analoge Bearbeitung der in Q-GK-G2 erarbeiteten Beziehungen zwischen zwei Geraden bietet sich hier zu Geraden und Ebenen an. Zur Veranschaulichung der Lage von Ebenen wird eine räumliche Geometriesoftware verwendet. In diesem Lernabschnitt sollte außerdem möglichst früh das Lösen von linearen Gleichungssystemen, die im Bereich der Analysis bereits intensiv thematisiert wurden, wiederholt und vertieft werden. Dabei sollten insbesondere die Matrix-Vektor-Schreibweise und der Gauß-Algorithmus wiederholt werden, der in einfachen Fällen eine Lösung des Gleichungssystems auch ohne GTR ermöglichen sollte. Weiter bietet der Einsatz des GTR Anlass, z. B. über die Interpretation der trigonalisierten Koeffizientenmatrix die Dimension des Lösungsraumes zu untersuchen. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung und der algebraischen Formalisierung soll stets deutlich werden. Im Sinne verstärkt wissenschaftspropädeutischen Arbeitens kann zur Herleitung der Normalenform einer Ebene auch der folgende anspruchsvolle Weg gewählt werden: Betrachtet wird die Gleichung: $\vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$. Durch systematisches Probieren oder Betrachten von Spezialfällen ($\vec{a} = 0$) wird die Lösungsmenge geometrisch als Ebene gedeutet. Nach Ausmultiplizieren dieser Gleichung kann dann die Koordinatenform bzw. Achsenabschnittsform der Ebene erkannt werden. Die unterschiedlichen Darstellungsformen der Ebenengleichung und ihre jeweilige geometrische Deutung (Koordinatenform, Achsenabschnittsform, Hesse-Normalenform als Sonderformen der Normalenform) werden gegenübergestellt, verglichen und in Beziehung gesetzt. Dabei intensi-

	viert der kommunikative Austausch die fachlichen Aneignungsprozesse. Die Achsenabschnittsform erleichtert es, Ebenen zeichnerisch darzustellen. Als leichtere Berechnungsmöglichkeit für den Normalenvektor aus zwei Richtungsvektoren sollte an dieser Stelle im Leistungskurs über den KLP hinausgehend auch das Vektorprodukt eingeführt werden. Ein Wechsel zwischen Koordinatenform und Parameterform der Ebene ist über die drei Achsenabschnitte möglich. Alternativ wird ein Normalenvektor mit Hilfe eines Gleichungssystems bestimmt. Falls es der zeitliche Rahmen zulässt können geeignete Flussdiagramme auch für die Lagebeziehungen Ebene-Gerade und – über den KLP hinausgehend – für die Lage zweier Ebenen entwickelt werden.

Thema: *Untersuchung von Polygonen und Polyedern(Q-GK/LK-G4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) • bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […]) *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen … Durchführen von Operationen mit Vektoren und Matrizen	In diesem letzten Lernabschnitt zur linearen Algebra und analytischen Geometrie steht die konzentrierte Wiederholung der bisher erlernten Konzepte im Zentrum. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für (im Sinne des Problemlösens offen angelegte) exemplarische geometrische Untersuchungen von Geraden und Ebenen im Raum und können auf reale Objekte (z. B. Gebäude) bezogen werden. Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt. Auch hier wird eine räumliche Geometriesoftware eingesetzt. Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene erlauben Rückschlüsse auf ihre Lagebeziehung. In diesem Unterrichtsvorhaben wird im Sinne einer wissenschaftspropädeutischen Grundbildung besonderer Wert gelegt auf eigenständige Lernprozesse bei der Aneignung eines begrenzten Stoffgebietes sowie bei der Lösung von problemorientierten Aufgaben. Anknüpfend an das Thema E-G2 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarproduktes untersucht. Dabei bieten sich vorrangig Problemlöseaufgaben (z. B. Nachweis von Viereckstypen) an. *Ein Vergleich von Lösungswegen mit und ohne Skalarprodukt kann im Einzelfall dahinterliegende Sätze transparent machen wie z. B. die Äquivalenz der zum Nachweis einer Raute benutzten Bedingungen* $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ *und* $(\vec{a})^2=(\vec{b})^2$ *für die Seitenvektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *eines Parallelogramms.* Durch Einschränkung des Definitionsbereichs werden Parallelogramme und Dreiecke beschrieben. So können auch anspruchsvollere Modellie-

	rungsaufgaben gestellt werden. Bei der Behandlung dieses Themenkomplexes sollten im Leistungskurs auch alle möglichen Abstandsprobleme zwischen Punkten, Geraden und Ebenen angesprochen und formalisiert werden. Abstände von Punkten zu Geraden und zu Ebenen ermöglichen es z. B., die Fläche eines Dreiecks oder die Höhe und das Volumen einer Pyramide zu bestimmen. Die Berechnung des Abstandes zweier windschiefer Geraden kann für den Vergleich unterschiedlicher Lösungsvarianten genutzt werden. Dabei wird unterschieden, ob die Lotfußpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke mitberechnet werden oder nachträglich aus dem Abstand bestimmt werden müssen.

Qualifikationsphase Grundkurs/LeistungskursStochastik (S)

Thema: *Von Übergängen und Prozessen (Q-GK/LK-S1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen • verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender und vorheriger Zustände, Bestimmen sich stabilisierender Zustände) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten) • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (Begründen) • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Begründen)	*Hinweis:* *Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.* Die parallele Nutzung verschiedener Darstellungsweisen für stochastische Prozesse – das aus der Sek I bekannte Baumdiagramm (dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt), versus der Darstellung als Übergangsdiagramm - sowie die Gegenüberstellung von Berechnungen am Baum mittels Pfadregeln versus Deutung als LGS in Matrix-Vektordarstellung, ermöglichen vertiefte Diskussionen über Stärken- und Schwächen unterschiedlicher mathematischer Modellierungen. Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen dabei zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung (Bestimmung über Grenzmatrix und exakte Lösung des LGS, inverse Matrix (mittels GTR), absorbierende Zustände). Als nicht obligatorische Ergänzung und Kontrastierung zur stabilen Verteilung können Prozesse ohne stabile Verteilung (z.B. zyklische Prozesse) untersucht werden. Im LK kann durch Betrachtung nicht-quadratischer Matrizen und theoretischer Überlegungen zur Existenz der inversen Matrix ein vertieftes Verständnis für die neue Operation „Matrizenmultiplikation“ erreicht werden.

• überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (Beurteilen)	Ein anderes Beispiel für eine nicht obligatorische Vertiefungsmöglichkeit besteht darin, bei stochastischen Prozessen mit absorbierenden Zuständen die Absorptionswahrscheinlichkeiten bzw. die mittleren Wartezeiten zu bestimmen (vgl. LS).

Thema: *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-GK/LK-S2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben • erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*	*Anknüpfend an die Vorerfahrungen aus der EF wird zunächst der Begriff der **Zufallsgröße** und der zugehörigen **Wahrscheinlichkeitsverteilung** (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt bzw. wiederholt. Dabei sollten sowohl Beispiele zu elementaren Verteilungen als auch zu den Standardmodellen (Binomialverteilung, geometrische und hypergeometrische Verteilung) behandelt werden. Mögliche Kontexte stellen verschiedene Glücksspiele dar.* Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der **Erwartungswert** einer Zufallsgröße definiert. Das Grundverständnis von Streumaßen kann z.B. durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots in der Sekundarstufe I reaktiviert werden. Über eingängige Beispiele (z.B. Ereignisse beim Roulettespiel) von Verteilungen mit gleichem Mittelwert aber unterschiedlicher Streuung wird die Definition der **Standardabweichung** als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; anhand gezielter Veränderungen der Verteilung werden die Auswirkungen auf deren Kenngrößen untersucht und interpretiert. Anschließend werden diese Größen als Charakteristika zum Vergleich von verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt. *Bereits in diesem Teil lohnt sich die Einführung der entsprechenden GTR-Befehle für die Wahrscheinlichkeitsverteilungen und auch Kenngrößen dieser Verteilungen, nachdem einige Beispiele händisch bearbeitet wurden.*

Thema: *Treffer oder nicht? – Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen (Q-GK/LK-S3)*

<table>
<tr><th>Zu entwickelnde Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>

Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
• verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente
• erklären die Binomialverteilungeinschließlich der kombinatorischen Bedeutung der Binomialkoeffizienten im Kontext und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten
• beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung
• bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen […]

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
• treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor*(Strukturieren)*
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
• beziehen erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler
• nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […]
• verwendenverschiedene digitale Werkzeuge zum
…Generieren von Zufallszahlen
…Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen
… Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen
…Variieren der Parameter von Binomialverteilungen
…Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung)

</td><td>

Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen, es sollte jedoch zumindest auch ein Beispiel der Modellumkehrung („Von der Verteilung zur Realsituation“) betrachtet werden. Zunächst bietet sich die Betrachtung von Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen an, die aus der EF bereits bekannt sein sollten.

Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ (hypergeometrische Verteilung) wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette’ (Binomialverteilung) eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d. h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen. An dieser Stelle sollten auch Fragen zu den Modellannahmen erfolgen; im LK kann es durchaus lohnend sein, die Konvergenz von hypergeometrischer Verteilung und Binomialverteilung zu betrachten. Ein weiterer Akzent kann hier durch die formale Herleitung der Binomialverteilung und die kombinatorische Begründung des Binomialkoeffizienten (z.B. mithilfe des Galtonbretts) gesetzt werden.

Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt dabei durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR. Die Kenngrößen μ und σ sollten im LK formal hergeleitet werden, worauf im GK verzichtet werden kann.

Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.
Durch den GTR-Einsatz und die Funktionen der Wertetabellen kann auch größtenteils auf den Formalismus der σ-Regeln verzichtet werden; gleichwohl sollte durch Erkundungen und Beispiele von den Schülern entdeckt werden, dass – unabhängig von n und p – immer etwa gleich große Anteile in bestimmten Umgebungen um den Erwartungswert liegen.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">**Thema:** *Modellieren mit Binomialverteilungen (Q-GK-S4)*</th></tr>
<tr><td>**Zu entwickelnde Kompetenzen**</td><td>**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**</td></tr>
<tr><td>

Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
- nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen
- schließen anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor*(Strukturieren)*
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*
- beurteilendie Angemessenheit aufgestellter […] Modelle für die Fragestellung *(Validieren)*
- reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)*

Argumentieren
Die Schülerinnen und Schüler
- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)*
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)*
- verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten *(Begründen)*

</td><td>

An dieser Stelle wird die Stochastik im GK deutlich weniger vertiefend als im LK (Q-LK-S4 bis S6) fortgeführt und abgeschlossen:

In verschiedenen Sachkontexten wird zunächst die Möglichkeit einer Modellierung der Realsituation mithilfe der Binomialverteilung überprüft. Dies erfolgt in unterschiedlichsten Realkontexten, deren Bearbeitung auf vielfältigen Zeitungsartikeln basieren kann. Die Grenzen des Modellierungsprozesses werden aufgezeigt und begründet. In diesem Zusammenhang werden geklärt:
- die Beschreibung des Sachkontextes durch ein Zufallsexperiment
- die Interpretation des Zufallsexperiments als Bernoullikette
- die Definition der zu betrachtenden Zufallsgröße
- die Unabhängigkeit der Ergebnisse
- die Benennung von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p

Prüfverfahren mit vorgegebenen Entscheidungsregeln bieten einen besonderen Anlass, um von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit zu schließen. Motivierend können hier auch praktische Beispiele und Simulationen eingebaut werden. Eine formale Behandlung von Hypothesentests (Binomialtests) muss dagegen im GK nicht (mehr) erfolgen.
Wenn genügend Unterrichtszeit zur Verfügung steht, können im Rahmen der beurteilenden Statistik vertiefend (und über den Kernlehrplan hinausgehend) Produzenten- und Abnehmerrisiken bestimmt werden, eine systematische Betrachtung und Charakterisierung möglicher Fehler bei der Entscheidung kann aber ebenfalls entfallen.

Hinweis: Eine Stichprobenentnahme kann auch auf dem GTR simuliert werden.

</td></tr>
</table>

Thema: *Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (Q-LK-S4)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von (binomialverteilten) Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen • nutzen die σ-Regeln für prognostische Aussagen • nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern) *(Lösen)* • interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung *(Reflektieren)*	An dieser Stelle geht der Grad der Vertiefung und Abstraktion über das im GK [→ siehe *(Q-GK/LK-S3)*] vermittelbare Maß hinaus: Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR. Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung induktiv entdeckt werden: Im GTR oder in einer Tabellenkalkulation wird bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit multipliziert. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$. Das Konzept der σ-Umgebungen wird durch experimentelle Daten abgeleitet. Es wird benutzt, um Prognoseintervalle anzugeben, den notwendigen Stichprobenumfang für eine vorgegebene Genauigkeit zu bestimmen und um das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz der großen Zahlen zu präzisieren. Neben dem σ-Formalismus kann aber auch auf die Wertetabellen des GTR hingewiesen werden, aus denen sich die entsprechenden Intervalle ebenfalls leicht – und ohne zusätzliche Berechnungen – ablesen lassen. *Durch die Behandlung der Stochastik im letzten Teil der Q-Phase wird häufig in den letzten Wochen mit einer (parallelen) Wiederholung und Prüfungsvorbereitung in der Analysis begonnen. Dies kann – praktisch als Anwendungsbeispiel – auch mit stochastischen Kontexten geschehen:*

Werkzeuge nutzen *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […] • verwendenverschiedene digitale Werkzeuge zum …Variieren der Parameter von Binomialverteilungen …Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen …Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung) …Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen	*In der Stochastik spielen in diesem Bereich die Erzeugendenfunktionen eine interessante Rolle. Erwartungswerte und Standardabweichungen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen lassen sich auch über die Betrachtung von Ableitungen dieser Erzeugendenfunktionen an bestimmten Stellen gewinnen. Bei einer Beispielauswahl von Binomialverteilung, geometrischer Verteilung und Poissonverteilung ergeben sich ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen sowie Exponentialfunktionen.*

Thema: *Ist die Glocke normal? (Q-LK-S5)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion • untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen • beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion (Gauß'sche Glockenkurve) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren [...] komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • übersetzen [...] komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*	Normalverteilungen sind in der Stochastik bedeutsam, weil sich die Summenverteilung von genügend vielen unabhängigen Zufallsvariablen häufig durch eine Normalverteilung approximieren lässt. Dementsprechend stellt die Untersuchung von Summenverteilungen einen sinnvollen Einstieg in dieses Unterrichtsvorhaben dar. Ergebnisse von Schulleistungstests oder Intelligenztests werden erst vergleichbar, wenn man sie hinsichtlich Mittelwert und Streuung normiert, was ein Anlass dafür ist, mit den Parametern μ und σ zu experimentieren. Auch Untersuchungen zu Mess- und Schätzfehlern bieten einen anschaulichen, ggf. handlungsorientierten Zugang. Da auf dem GTR die Normalverteilung einprogrammiert ist, spielt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Satz von de Moivre-Laplace) für die Anwendungsbeispiele im Unterricht eine untergeordnete Rolle. Dennoch sollte bei genügender Zeit deren Herleitung als Vertiefung der Integralrechnung im Leistungskurs thematisiert werden, da der Übergang von der diskreten zur stetigen Verteilung in Analogie zur Approximation von Flächen durch Produktsummen nachvollzogen werden kann (vgl. Q-LK-A3). Die Visualisierung erfolgt mithilfe des GTR. Theoretisch ist von Interesse, dass es sich bei der Gauß'schen Glockenkurve um den Graphen einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion (Gauß'sche Integralfunktion) kein Term angegeben werden kann. *Durch die Behandlung der Stochastik im letzten Teil der Q-Phase wird häufig in den letzten Wochen mit einer (parallelen) Wiederholung und Prüfungsvorbereitung in der Analysis begonnen. Dies kann – praktisch als Anwendungsbeispiel – auch mit stochastischen Kontexten geschehen:* *Wie oben erwähnt können Dichtefunktionen stetiger Verteilungen dazu genutzt werden, den Integralbegriff zu wiederholen und im maßtheoretischen Sinne zu vertiefen.*

• wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Generieren von Zufallszahlen … Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen …Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen ... Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen • nutzen digitale Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen • entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge, wählen sie gezielt aus und nutzen sie zum Erkunden …, Berechnen und Darstellen • reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge	*Wenn noch Zeit vorhanden ist, kann als ein einfacheres, besser handhabbares Beispiel auch noch die Exponentialverteilung betrachtet werden, da von dieser leicht die Integralfunktion berechnet werden kann.* *Darüber hinaus können bei diesen stetigen Verteilungen auch die Kenngrößen (Erwartungswert, Standardabweichung) betrachtet und berechnet werden und auf diese Weise die partielle Integration und die Integration mithilfe (linearer) Substitution eingeführt bzw. wiederholt werden.*

Thema: *Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen (Q-LK-S6)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • interpretieren Hypothesentests bezogen auf den Sachkontext und das Erkenntnisinteresse • beschreiben und beurteilen Fehler 1. und 2. Art **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)* • führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei *(Diskutieren)*	Zentral ist das Verständnis der Idee des Hypothesentests, d. h. mit Hilfe eines mathematischen Instrumentariums einschätzen zu können, ob Beobachtungen auf den Zufall zurückzuführen sind oder nicht. Ziel ist es, die Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen möglichst klein zu halten. Besonders motivierend ist an dieser Stelle die Entwicklung, Durchführung und Auswertung eigener Tests, z.B. Allgemeinbildungstests oder Tests unter Einbeziehung der Körpersinne, z.B. Geschmacks-, Hörtests, etc. Darüber hinaus soll die Logik von Hypothesentests an datengestützten gesellschaftlich relevanten Fragestellungen, z. B. Häufungen von Krankheitsfällen in bestimmten Regionen oder alltäglichen empirischen Phänomenen (z.B. Umfrageergebnisse aus der Lokalzeitung) entwickelt werden. Im Rahmen eines realitätsnahen Kontextes werden folgende Fragen, besonders bei einseitigen Hypothesentests, diskutiert: - Welche Hypothesen werden aufgestellt? Wer formuliert diese mit welcher Interessenlage? - Welche Fehlentscheidungen treten beim Testen auf? Welche Konsequenzen haben sie? Hierzu kann ein tabellarisches Schema entwickelt werden. Durch Untersuchung und Variation gegebener Entscheidungsregeln werden die Bedeutung des Signifikanzniveaus und der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Fehlentscheidungen 1. und 2. Art zur Beurteilung des Testverfahrens erarbeitet. Hierbei sollten auch Beispiele im Kontext der oben formulierten Fragen betrachtet werden, in denen die Hypothesenwahl (und damit die resultierenden Fehler) je nach Position/Intention verschieden sein kann. *Eine systematische Trennung zwei- und einseitiger Hypothesentests ist nicht erforderlich und falls noch Zeit vorhanden ist, kann auch noch ein Beispiel zum Alternativtest betrachtet werden. Dagegen geht die Betrachtung weiterer Testverfahren oder Tests mit anderen Zufallsgrößen (z.B. χ^2-Verteilung) über den unterrichtlichen Rahmen hinaus.*

2.3 Grundsätze der fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe

In Absprache mit der Lehrerkonferenz sowie unter Berücksichtigung des Schulprogramms hat die Fachkonferenz Mathematik die folgenden fachmethodischen und fachdidaktischen Grundsätze beschlossen. Die Grundsätze 1 bis 15 beziehen sich auf fachübergreifende Aspekte, die Grundsätze 16 bis 29 sind fachspezifisch angelegt.

Überfachliche Grundsätze:

1.) Geeignete Problemstellungen zeichnen die Ziele des Unterrichts vor und bestimmen die Struktur der Lernprozesse.
2.) Inhalt und Anforderungsniveau des Unterrichts entsprechen dem Leistungsvermögen der Schülerinnen und Schüler.
3.) Die Unterrichtsgestaltung ist auf die Ziele und Inhalte abgestimmt.
4.) Medien und Arbeitsmittel sind lernerorientiert gewählt.
5.) Die Schülerinnen und Schüler erreichen einen Lernzuwachs.
6.) Der Unterricht fördert und fordert eine aktive Teilnahme der Lernenden.
7.) Der Unterricht fördert die Zusammenarbeit zwischen den Lernenden und bietet ihnen Möglichkeiten zu eigenen Lösungen.
8.) Der Unterricht berücksichtigt die individuellen Lernwege der einzelnen Schülerinnen und Schüler.
9.) Die Lernenden erhalten Gelegenheit zu selbstständiger Arbeit und werden dabei unterstützt.
10.) Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Einzel-, Partner- bzw. Gruppenarbeit sowie Arbeit in kooperativen Lernformen.
11.) Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Arbeit im Plenum.
12.) Die Lernumgebung ist vorbereitet; der Ordnungsrahmen wird eingehalten.
13.) Die Lehr- und Lernzeit wird intensiv für Unterrichtszwecke genutzt.
14.) Es herrscht ein positives pädagogisches Klima im Unterricht.
15.) Wertschätzende Rückmeldungen prägen die Bewertungskultur und den Umgang mit den Lernenden.

Fachliche Grundsätze:

16.) Der Unterricht ist in seinen Anforderungen und im Hinblick auf die zu erreichenden Kompetenzen und deren Teilziele für die Lernenden transparent.
17.) Der Unterricht ist kognitiv aktivierend und verständnisfördernd und stärkt über entsprechende Arbeitsformen auch kommunikative und argumentative Kompetenzen.

18.) Der Unterricht fördert das Einbringen individueller Lösungsideen und den Umgang mit unterschiedlichen Ansätzen; insbesondere ermutigt er die Lernenden dazu, auch fachlich unvollständige Gedanken zu äußern und zur Diskussion zu stellen. Dazu gehört auch eine positive Fehlerkultur im Sinne einer Förderung des Lernfortschritts der gesamten Lerngruppe.
19.) Die Bereitschaft zu problemlösenden Arbeiten wird durch Ermutigungen und Tipps gefördert und unterstützt.
20.) Die Einstiege in neue Themen erfolgen in der Regel mithilfe sinnstiftender Kontexte, die an das Vorwissen der Lernenden anknüpfen und deren Bearbeitung sie in die dahinter stehende Mathematik führt.
21.) Es wird genügend Zeit eingeplant, in der sich die Lernenden neues Wissen aktiv konstruieren und in der sie angemessene Grundvorstellungen zu neuen Begriffen entwickeln können.
22.) Der Unterricht bietet nach induktiven oder deduktiven Erarbeitungsphasen immer auch Phasen der Reflexion, in denen der Prozess der Erkenntnisgewinnung bewusst gemacht wird.
23.) Der Unterrichthält immer wieder auch Phasen der Übung und des Transfers auf neue Aufgaben und Problemstellungen bereit.
24.) Der Unterrichtbietet die Gelegenheit zum regelmäßigen wiederholenden Üben sowie zu selbstständigem Aufarbeiten von Unterrichtsinhalten, so dass grundlegende Fertigkeiten „wachgehalten“ werden.
25.) Im Unterricht werden an geeigneter Stelle differenzierende Aufgaben (z. B. „Blütenaufgaben“) eingesetzt.
26.) Die Lernenden werden zu regelmäßiger, sorgfältiger und vollständiger Dokumentation der von ihnen bearbeiteten Aufgaben angehalten.
27.) Parallel zu den Heften der Lerner können in den Kursen Protokolle oder Portfolios als „Wissensspeicher“ geführt werden, in dem fachliche Inhalte und Erkenntnisse bezüglich der Prozesse in systematischer Form gesichert werden.
28.) Im Unterricht wird auf einen angemessenen Umgang mit fachsprachlichen Elementen geachtet.
29.) Digitale Medien werden regelmäßig dort eingesetzt, wo sie dem Lernfortschritt dienen; dazu zählen insbesondere der graphische Taschenrechner sowie situationsangemessen auch Computersoftware (Tabellenkalkulation, Dynamische Geometriesoftware, Funktionenplotter, Computeralgebrasysteme).

2.4 Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung

Auf der Grundlage von § 48 SchulG, § 13 APO-GOSt sowie Kapitel 3 des Kernlehrplans Mathematik hat die Fachkonferenz im Einklang mit dem entsprechenden schulbezogenen Konzept die nachfolgenden Grundsätze zur Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung beschlossen. Die nachfolgenden Absprachen stellen die Minimalanforderungen an das lerngruppenübergreifende gemeinsame Handeln der Fachgruppenmitglieder dar. Bezogen auf die einzelne Lerngruppe kommen ergänzend weitere der in den Folgeabschnitten genannten Instrumente der Leistungsüberprüfung zum Einsatz.

Verbindliche Absprachen:

- Klausuren können nach entsprechender Wiederholung im Unterricht auch Aufgabenteile enthalten, die Kompetenzen aus weiter zurückliegenden Unterrichtsvorhaben oder übergreifende prozessbezogene Kompetenzen erfordern.
- Mindestens eine Klausur je Schuljahr in der E-Phase sowie in Grund- und Leistungskursen der Q-Phase enthält einen „hilfsmittelfreien“ Teil.
- Alle Klausuren in der Q-Phase enthalten auch Aufgaben mit Anforderungen im Sinne des Anforderungsbereiches III (vgl. Kernlehrplan Kapitel 4).
- Für die Aufgabenstellung der Klausuraufgaben werden die Operatoren der Aufgaben des Zentralabiturs verwendet. Diese sind mit den Schülerinnen und Schülern zu besprechen.
- Schülerinnen und Schülern wird in allen Kursen Gelegenheit gegeben, mathematische Sachverhalte zusammenhängend (z. B. eine Hausaufgabe, einen fachlichen Zusammenhang, einen Überblick über Aspekte eines Inhaltsfeldes …) selbstständig vorzutragen.

Überprüfung der schriftlichen Leistung

- **Einführungsphase:** Zwei Klausuren je Halbjahr, davon eine (in der Regel die vierte Klausur in der Einführungsphase) als landeseinheitlich zentral gestellte Klausur. Dauer der Klausuren: 2 Unterrichtsstunden. (Vgl. APO-GOSt B § 14 (1) und VV 14.1.)
- **Grundkurse Q-Phase Q 1.1 – Q 2.1:** Zwei Klausuren je Halbjahr. Dauer der Klausuren: 2 Unterrichtsstunden, in Q2 3 Unterrichtsstunden. (Vgl. APO-GOSt B § 14 (2) und VV 14.12)
- **Grundkurse Q-Phase Q 2.2:** Eine Klausur unter Abiturbedingungen

für Schülerinnen und Schüler, die Mathematik als 3. Abiturfach gewählt haben. Dauer der Klausur: 3 Zeitstunden. (Vgl. APO-GOSt B § 14 (2) und VV 14.2.)

- **Leistungskurse Q-Phase Q 1.1 – Q 2.1:** Zwei Klausuren je Halbjahr. Dauer der Klausuren: 3 Unterrichtsstunden, in Q2 4 Unterrichtsstunden.(Vgl. APO-GOSt B § 14 (2) und VV 14.2.)
- **Leistungskurse Q-Phase Q 2.2:** Eine Klausur unter Abiturbedingungen (die Fachkonferenz hat beschlossen, die letzte Klausur vor den Abiturklausuren unter Abiturbedingungen bzgl. Dauer und inhaltlicher Gestaltung zu stellen). Dauer der Klausur: 4,25 Zeitstunden. (Vgl. APO-GOSt B § 14 (2) und VV 14.2.)
- **Facharbeit:** Gemäß Beschluss der Lehrerkonferenz wird die erste Klausur Q1.2 für diejenigen Schülerinnen und Schüler, die eine Facharbeit im Fach Mathematik schreiben, durch diese ersetzt. (Vgl. APO-GOSt B § 14 (3) und VV 14.3.)

In den Klausuren soll geprüft werden:

- Ob ausgewählte im Unterricht besprochene Fachbegriffe inhaltlich verstanden worden sind.
- Ob die im Unterricht besprochenen mathematischen Verfahren verstanden worden sind.
- Ob die im Unterricht besprochenen Inhalte auf realitätsnahe Inhalte bezogen werden können.
- Ob die im Unterricht besprochenen Verfahren und Inhalte auf neue Situationen übertragen und angemessen angewendet werden können

Überprüfung der sonstigen Leistung

In die Bewertung der sonstigen Mitarbeit fließen folgende Aspekte ein, die den Schülerinnen und Schülern bekanntgegeben werden müssen:

- Beteiligung am Unterrichtsgespräch (Quantität und Kontinuität)
- Qualität der Beiträge (inhaltlich und methodisch)
- Eingehen auf Beiträge und Argumentationen von Mitschülerinnen und -schülern, Unterstützung von Mitlernenden
- Umgang mit neuen Problemen, Beteiligung bei der Suche nach neuen Lösungswegen
- Selbstständigkeit im Umgang mit der Arbeit
- Umgang mit Arbeitsaufträgen (Hausaufgaben, Unterrichtsaufgaben…)
- Anstrengungsbereitschaft und Konzentration auf die Arbeit
- Beteiligung während kooperativer Arbeitsphasen
- Darstellungsleistung bei Referaten oder Plakaten und beim Vortrag von Lösungswegen

Kriterien für die Überprüfung der schriftlichen Leistung

- Die Bewertung der schriftlichen Leistungen in Klausuren erfolgt über Punktesystem. Dabei sind in der Qualifikationsphase alle Anforderungsbereiche zu berücksichtigen, wobei der Anforderungsbereich II den Schwerpunkt bildet.
- Die Zuordnung der Klausurpunkte zu den Notenstufen orientiert sich in der Qualifikationsphase am Zuordnungsschema des Zentralabiturs. Die Note ausreichend (5 Punkte) soll bei Erreichen von ca. 45 % der Klausurpunkte erteilt werden, die nächsthöhere Notenstufe ergibt sich in der Regel äquidistant in 5%-Schritten. Von dem Zuordnungsschema kann abgewichen werden, wenn sich z.B. besonders originelle Teillösungen nicht durch Klausurpunkte gemäß den Kriterien des Erwartungshorizonts abbilden lassen oder eine Abwertung wegen besonders schwacher Darstellung angemessen erscheint. Die Festsetzung der Klausurpunkte erfolgt durch die jeweilige Fachlehrkraft auf Grundlage inhaltlicher Überlegungen zur jeweiligen Klausur.
- Die Darstellungsleistung fließt aufgrund inhaltlicher Überlegungen in die Bepunktung des jeweiligen Aufgabenteils mit ein. Dabei werden bis zu 5% der Klausurpunkte für den Bereich Ordnung und Darstellungsleistung erteilt.
- Von den genannten Zuordnungsschemata kann im Einzelfall begründet abgewichen werden.

Kriterien für die Überprüfung der sonstigen Leistungen

Im Fach Mathematik ist in besonderem Maße darauf zu achten, dass die Schülerinnen und Schüler zu konstruktiven Beiträgen angeregt werden. Daher erfolgt die Bewertung der sonstigen Mitarbeit nicht defizitorientiert oder ausschließlich auf fachlich richtige Beiträge ausgerichtet. Vielmehr bezieht sie Fragehaltungen, begründete Vermutungen, sichtbare Bemühungen um Verständnis und Ansatzfragmente mit in die Bewertung ein.

Im Folgenden werden Kriterien für die Bewertung der sonstigen Leistungen jeweils für eine gute bzw. eine ausreichende Leistung dargestellt. Dabei ist bei der Bildung der Quartals- und Abschlussnote jeweils die Gesamtentwicklung der Schülerin bzw. des Schülers zu berücksichtigen, eine arithmetische Bildung aus punktuell erteilten Einzelnoten erfolgt nicht:

Leistungs-aspekt	Anforderungen für eine gute Leistung	Anforderungen für eine ausreichende Leistung
	Die Schülerin, der Schüler	
Qualität der Unterrichts-beiträge	nennt richtige Lösungen und begründet sie nachvollziehbar im Zusammenhang der Aufgabenstellung	nennt teilweise richtige Lösungen, in der Regel jedoch ohne nachvollziehbare Begründungen
	geht selbstständig auf andere Lösungen ein, findet Argumente und Begründungen für ihre/seine eigenen Beiträge	geht selten auf andere Lösungen ein, nennt Argumente, kann sie aber nicht begründen
	kann ihre/seine Ergebnisse auf unterschiedliche Art und mit unterschiedlichen Medien darstellen	kann ihre/seine Ergebnisse nur auf eine Art darstellen
Kontinuität/Quantität	beteiligt sich regelmäßig am Unterrichtsgespräch	nimmt eher selten am Unterrichtsgespräch teil
Selbstständigkeit	bringt sich von sich aus in den Unterricht ein	beteiligt sich gelegentlich eigenständig am Unterricht
	ist selbstständig ausdauernd bei der Sache und erledigt Aufgaben gründlich und zuverlässig	benötigt oft eine Aufforderung, um mit der Arbeit zu beginnen; arbeitet Rückstände nur teilweise auf
	strukturiert und erarbeitet neue Lerninhalte weitgehend selbstständig, stellt selbstständig Nachfragen	erarbeitet neue Lerninhalte mit umfangreicher Hilfestellung, fragt diese aber nur selten nach
	erarbeitet bereitgestellte Materialien selbstständig	erarbeitet bereitgestellte Materialien eher lückenhaft
Hausaufgaben	erledigt sorgfältig und vollständig die Hausaufgaben	erledigt die Hausaufgaben weitgehend vollständig, aber teilweise oberflächlich
	trägt Hausaufgaben mit nachvollziehbaren Erläuterungen vor	nennt die Ergebnisse, erläutert erst auf Nachfragen und oft unvollständig
Kooperation	bringt sich ergebnisorientiert in die Gruppen-/Partnerarbeit ein	bringt sich nur wenig in die Gruppen-/Partnerarbeit ein
	arbeitet kooperativ und respektiert die Beiträge Anderer	unterstützt die Gruppenarbeit nur wenig, stört aber nicht
Gebrauch der Fachsprache	wendet Fachbegriffe sachangemessen an und kann ihre Bedeutung erklären	versteht Fachbegriffe nicht immer, kann sie teilweise nicht sachangemessen anwenden
Werkzeug-gebrauch	setzt Werkzeuge im Unterricht sicher bei der Bearbeitung von Aufgaben und zur Visualisierung von Ergebnissen ein	benötigt häufig Hilfe beim Einsatz von Werkzeugen zur Bearbeitung von Aufgaben

Präsentation/Referat	präsentiert vollständig, strukturiert und gut nachvollziehbar	präsentiert an mehreren Stellen eher oberflächlich, die Präsentation weist Verständnislücken auf
Portfolio	führt das Portfolio sorgfältig und vollständig	führt das Portfolio weitgehend sorgfältig, aber teilweise unvollständig
Schriftliche Übung	ca. 75% der erreichbaren Punkte	ca. 50% der erreichbaren Punkte

Grundsätze der Leistungsrückmeldung und Beratung

Für Vorträge, Präsentationen, Arbeitsprotokolle, Dokumentationen und andere **Lernprodukte der sonstigen Mitarbeit** erfolgt eine Leistungsrückmeldung, bei der inhalts- und darstellungsbezogene Kriterien angesprochen werden. Hier werden sowohl zentrale Stärken als auch Optimierungsperspektiven für jede Schülerin bzw. jeden Schüler hervorgehoben.

Die Leistungsrückmeldungen bezogen auf die **mündliche Mitarbeit** erfolgen auf Nachfrage der Schülerinnen und Schüler außerhalb der Unterrichtszeit, spätestens aber am Ende eines jedes Quartals durch eine individuelle, differenzierte Rückmeldung im Gespräch zwischen Lehrkraft und den Lernenden oder an Eltern-/Schülersprechtagen.

Mündliche Abiturprüfungen

Auch für das mündliche Abitur (im 4. Fach oder bei Abweichungs- bzw. Bestehensprüfungen im 1. bis 3. Fach) wird ein Kriterienraster für den ersten und zweiten Prüfungsteil vorgelegt, aus dem auch deutlich wird, wann eine gute oder ausreichende Leistung erreicht wird.

2.5 Lehr- und Lernmittel

Bücher:

Für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II ist an der Schule derzeit das **Lehrbuch**, **Elemente der Mathematik" (Schroedel-Verlag)** eingeführt.

In der Einführungsphase verleiht der Schulbuchkeller die Ausgabe von 2010, die ggf. in den nächsten Jahren durch die Ausgabe von 2014 ersetzt werden kann.

In der Qualifikationsphase wird das Lehrbuch aus dem Eigenanteil der Schüler beschafft. Dabei wird derzeit noch die Ausgabe von 2011 genutzt, die mit der kommenden Jahrgangsstufe Q1 ab 2016/17 durch die GK- bzw. LK-Ausgabe von 2015 ersetzt wird.

Neben der Unterrichtsarbeit dienen die Lehrbücher den Lernenden zur Vor- und Nachbereitung des Unterrichts und zur Klausurvorbereitung.

Darüber hinaus stehen der Fachschaft Mathematik im Bestand der Lehrerbibliothek diverse aktuelle und ältere Ausgaben gängiger Lehrwerke sowie verschiedene Material- und Arbeitsblattsammlungen zur Verfügung.

In den Klausuren sowie in den zentralen Prüfungen steht der Fachschaftsbestand an **Formelsammlungen „Das große Tafelwerk" (Cornelsen-Verlag)**zur Verfügung (derzeit ca. 60 Exemplare). Da für die zentralen Prüfungen keine Ausleihe einer Formelsammlung an jeden einzelnen Lernenden gewährleistet werden kann, dürfen auch eigene Formelsammlungen – nach vorheriger Überprüfung – benutzt werden.

Elektronische Lehrmittel und Unterstützung:

In jedem Schulhalbjahr wird eine größere EVA-Aufgabe gestellt, die in der Kursmappe eingetragen wird und an der unabhängig vom Unterricht und ggf. in ausgefallenen Unterrichtsstunden gearbeitet werden kann.

Zudem sollte ein Mail-Verteiler des Kurses eingerichtet werden, über den Informationen und auch kurzfristig EVA-Aufträge an die Lernenden weitergegeben werden können.

Zur Unterstützung der Arbeit der Lernenden können die Lehrkräfte sämtliche Materialien, Arbeits- und Übungsblätter in elektronischer Form in einem Dropbox-Ordner, der jedem Schüler des Kurses bei Bedarf zugänglich ist, zur Verfügung stellen.

Unterstützende Materialien sind auch im *Lehrplannavigator* des NRW-Bildungsportals angegeben. Verweise darauf finden sich über Links in den HTML-Fassungen des Kernlehrplans und des Musters für einen Schulinternen Lehrplan. Den *Lehrplannavigator* für das Fach Mathematik findet man unter:

http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe/mathematik/

Technische Hilfsmittel:

Als Graphischer Taschenrechner ist an der Goetheschule seit dem Schuljahr 2014/15 der TI-Nspire nach Fachkonferenzbeschluss eingeführt. Davor wurde mit dem TI-84plus gearbeitet.

Für die Graphischen Taschenrechner sind Unterrichtsmaterialien und weitere Hilfsmittel im Fachschaftsbestand vorhanden. Zudem gibt es Projektionsgeräte für den OHP und Emulatoren an den Schul-PCs.

Zum Arbeiten mit dem GTR existiert eine Vielzahl an Begleitheften, auch passend zur eingeführten Lehrbuchreihe.

An den Schulcomputern werden nach Bedarf verschiedene Softwareprodukte eingesetzt:

- Tabellenkalkulation: Excel
- Funktionenplotter: Turboplot, AniGra
- Dynamische Geometriesoftware: Euklid Dynageo, GeoGebra
- Computeralgebrasysteme: Derive

3 Entscheidungen zu fach- und unterrichtsübergreifenden Fragen

Die Fachkonferenz Mathematik hat sich im Rahmen des Schulprogramms für folgende zentrale Schwerpunkte entschieden:

Zusammenarbeit mit anderen Fächern

Durch die unterschiedliche Belegung von Fächern können Schülerinnen und Schüler Aspekte aus anderen Kursen mit in den Mathematikunterricht einfließen lassen. Es wird Wert darauf gelegt, dass in bestimmten Fragestellungen die Expertise einzelner Schülerinnen und Schüler gesucht wird, die aus einem von ihnen belegten Fach genauere Kenntnisse mitbringen und den Unterricht dadurch bereichern.

Eine besondere Nähe besteht naturgegeben zum Fach Physik. Je nach Kurszusammensetzung können daher auch physikalische Kontexte miteinbezogen und mathematisch behandelt werden. Die Behandlung der Themen und Inhalte wird im Gespräch mit den Fachkollegen abgestimmt, so dass für die Physik essentielle mathematische Methoden und Modelle (z.B. Exponentialfunktionen oder Integrale) im dortigen Fachunterricht zum benötigten Zeitpunkt zur Verfügung stehen und vorab bereits in der Mathematik behandelt wurden.

Vorbereitung auf die Erstellung der Facharbeit

Um eine einheitliche Grundlage für die Erstellung und Bewertung der Facharbeiten in der Jahrgangsstufe Q1 zu gewährleisten, findet im Vorfeld des Bearbeitungszeitraums ein fachübergreifender Projekttag statt, gefolgt von einem Besuch einer Universitätsbibliothek. Die AG Facharbeit hat schulinterne Richtlinien für Erstellung einer Facharbeit angefertigt, die die unterschiedlichen Arbeitsweisen in den wissenschaftlichen Fachbereichen berücksichtigen. Im Verlauf des Projekttages werden den Schülerinnen und Schülern in einer zentralen Veranstaltung und in Gruppen diese schulinternen Richtlinien vermittelt.

Exkursionen

In der gymnasialen Oberstufe werden bei Bedarf in Absprache mit der Stufenleitung nach Möglichkeit unterrichtsbegleitende Exkursionen durchgeführt. Diese sollen im Unterricht vor- bzw. nachbereitet werden.

4 Qualitätssicherung und Evaluation

Evaluation des schulinternen Curriculums

Das schulinterne Curriculum stellt keine starre Größe dar, sondern ist als „lebendes Dokument“ zu betrachten. Dementsprechend werden die Inhalte stetig überprüft, um ggf. Modifikationen vornehmen zu können. Die Fachkonferenz trägt durch diesen Prozess zur Qualitätsentwicklung und damit zur Qualitätssicherung des Faches Mathematik bei.

Die Evaluation erfolgt jährlich. Zu Schuljahresbeginn werden die Erfahrungen des vergangenen Schuljahres in der Fachschaft gesammelt, bewertet und eventuell notwendige Konsequenzen und Handlungsschwerpunkte formuliert.

Fachschaftsarbeit

Die folgende Checkliste dient dazu, den Ist-Zustand bzw. auch Handlungsbedarf in der fachlichen Arbeit festzustellen und zu dokumentieren, Beschlüsse der Fachkonferenz zur Fachschaftsarbeit in übersichtlicher Form festzuhalten sowie die Durchführung der Beschlüsse zu kontrollieren und zu reflektieren. Die Liste wird regelmäßig überarbeitet und angepasst. Sie dient auch dazu, Handlungsschwerpunkte für die Fachschaft zu identifizieren und abzusprechen.

5 Anhang

Jahresterminkalender Mathematik – Schuljahr 2018/19

Datum	Termin/Aktion	Informationen, Bemerkungen	Lehrer
Sep'18 - Dez'18	Essener M-Wettbewerb	1. Runde im Wettbewerb, verteilen an interessierte Schüler Wettbewerbsbetreuung, Siegerehrung (Ratssaal Stadt E)	Alle, Brü
25.09.18	Fachkonferenz	16 -18 Uhr, Raum 11	alle
23./24.11.18	Lange Nacht der Mathematik	Lange Nacht der Mathematik – Teamwettbewerb für (7)/8-Q2 in 4er-Gruppen	alle
01.12.18	Tag der offenen Tür	Präsentation des Faches Mathematik Im Vorfeld: Organisation	Bar, Lg, Pusch, Gon, Klm
Dez'18	Mathe im Advent	Adventskalender mit täglichen Matheaufgaben für alle Stufen unter www.mathekalender.de (freiwillig)	Alle
15.01.19	Bolyai-Team-Wettbewerb	2-4 SuS aus einer Jg.St. bilden ein Team (3€ p.P.) (Anmeldeschluss: 12.11.18, 22 Uhr)	Alle
18.01.19	Vortrag Holger Dette	Statistik/Stochastik- Vortrag mit anschließender Diskussion für die Leistungskurse	LK-Lehrer
26.01.19	Maastricht-Wettbewerb	Internationaler Modellierungs-Teamwettbewerb Sek II (Wettbewerb für ein Team mit max. fünf starken S)	
19.03.19	LSE 8 („VERA 8")	Lernstandserhebung in Mathematik	M-L 8
21.03.19	Känguru-Tag	Känguru-Mathematikwettbewerb – Organisation Werbung, Mithilfe bei der Auswertung (Punkteingabe)	SWD Alle
03.05.19 21.05.19	ZA Mathematik LK, GK	Zentralabitur in Mathematik im LK und im 3. Prüfungsfach (offizieller Nachschreibtermin)	M-L Q2
28./29.5.19	Mündliches Abitur	Mündliche Abiturprüfungen im 4. Prüfungsfach	M-L Q2
13.06.19 19.06.19	Zentralklausur EF	Zentrale Mathematikklausur in der Einführungsphase (optionaler Nachschreibtermin)	M-L EF
28.06.19	Abiturnachprüfungen	Ggf. Nachprüfungen in Mathematik im 1.-3. Abiturfach	
03.-05.07.19	Mathezirkus	Mathezirkus für die Klassen 5 und Kooperationspartner (zuletzt: MGB, Helmholtz-Gymnasium, Grashof-Gymnasium)	Klm, Pusch
06.07.19	Abiturfeier	Bestellung & Vergabe des Mathematik-Abiturpreises (DMV-Preis mit Buchpreis, 1 Jahr Mitgliedschaft in der DMV)	Brü
10.07.2019	OTW	Online-Team-Wettbewerb für Teams aus allen Klassen und Stufen	alle
12.07.19	Siegerehrung	Ehrung von „Mathematiker/Mathematikerin des Jahres" (i.d.R. eine Schülerin und ein Schüler aus versch. Stufen)	Klm, Pusch